

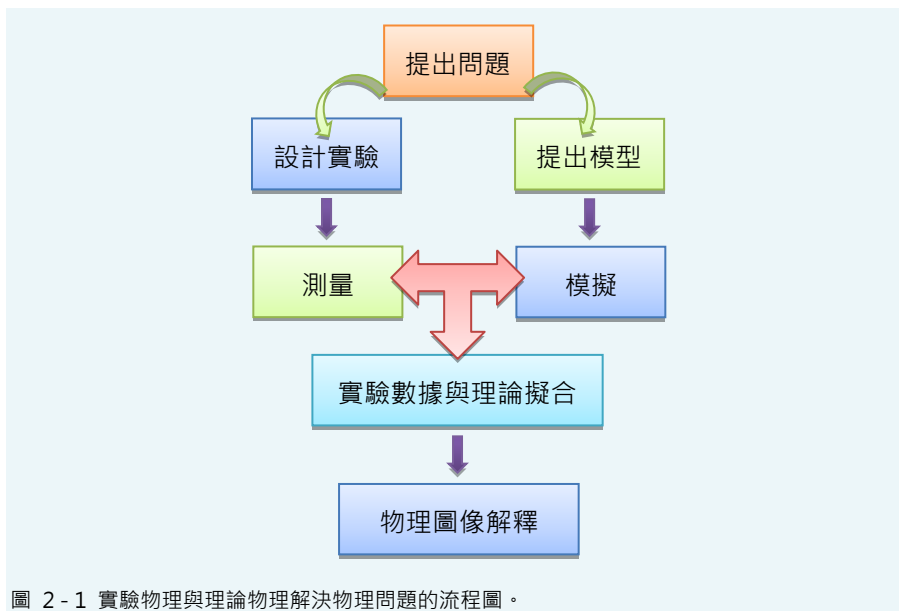
## 第二章 物理測量(Physics and Measurement)

### 實驗物理與理論物理

普通物理課程的編排，主要依照所觀察的物理現象分述在各個章節，約略是按照實驗測量的現象來分類(次領域)。但本書以理論推導為主，主要是為了訓練大家利用數學邏輯來思考、了解物理。一般的物理包含實驗物理與理論物理，雖然本書以物理數學推導為主要宗旨，但不代表理論物理等同於數學或是哲學。

1. 實驗物理學家致力於**開發新的測量方式與儀器**，用來觀察過去無法探索到的物理現象，藉由尋找最適當的理論與數學等方法來曲線擬合數據，研發分析數據的新方式，最後更利用物理圖像闡釋所觀測到的新現象。
2. 理論物理學家則致力於**開發新的數學工具**，或是尋找適當的數學工具，用來解釋觀察到的物理現象，並與實驗數據擬合。此外還能預測未來新奇物理現象，最後同樣用物理圖像來解釋與推廣理論物理成果。

以物理領域來看，實驗與理論一樣重要，書本上著重理論的推導，但事實上數學邏輯並非是解決物理問題的唯一路徑。以實際的結果觀察，實驗物理貢獻一半以上的物理科學研究發展，因本書以訓練物理思考為主，所以在本章僅粗略提到物理實驗基本測量概念。



## 古典物理與近代物理

物理發展的過程大概可以用時間與次領域來劃分。先以時間來區分，大約是西元二十世紀初(1900-1920年)為分界，約在1900年前後古典物理已發展成熟，二十世紀開始才進入近代物理時期。

再以次領域來區分，古典物理在伽利略與牛頓的空間與時間架構下，發展出以下完整的次領域：運動學、力學、能量、動量、轉動、靜力學、重力、流體力學、簡諧振盪、波動、聲學、熱力學、電學、磁學與光學等。近代物理則以相對論與量子物理為發展的兩大主軸，用來解釋微觀世界的粒子運動，包括光子、電子、原子與原子核等。此外如把尺度縮小，可以探索原子核模型與高能物理實驗結果。反之把尺度放大，可以了解固體(凝態)物理，包括固體電性、熱學性質、光學性質、磁學性質、半導體物理、超導體等。

大概在1950年代時候，許多發展半導體實驗與理論的研究，原是發表在物理的重要期刊如物理評論(Physical Review)與物理評論通訊(Physical Review Letters)，之後才逐漸把半導體物理工程化，並且轉移到電機等工程應用的領域。此外早在十九世紀，由理論物理學家 James Clerk Maxwell 預測電磁波通訊，並由實驗物理學家 Heinrich Hertz 獲得驗證。經由這些歷史顯示，物理科學的發展具先驅者角色，對未來幾十年的科技產業發展影響甚鉅。

### 2.1 長度、質量與時間的測量標準

實驗的第一步就是測量，那大家會想：該如何測量呢？

在大家熟悉的世界裡，你已經學會使用尺規來測量物體的長度(也可說是長、寬、高)、用磅秤來測量重量、用手錶或是碼錶來測量時間。在測量的同時，你有沒有想過測量的步驟與原則呢？最重要的原則其實就是比較！把待測物的一邊長跟一把標準的尺比較，由尺上面的刻度讀出待測物長度的數字，最後再給予一個比刻度小的估計值。因此我們可說，待測物實際的長度為尺規所讀取到的數字，加上一位估計值。按照這樣的測量原則，我們請讀者想像現在手上有一台可以看見奈米尺度的放大鏡(即顯微鏡)，並且觀察到圖 2-2 漂亮的奈米尺度地形圖。

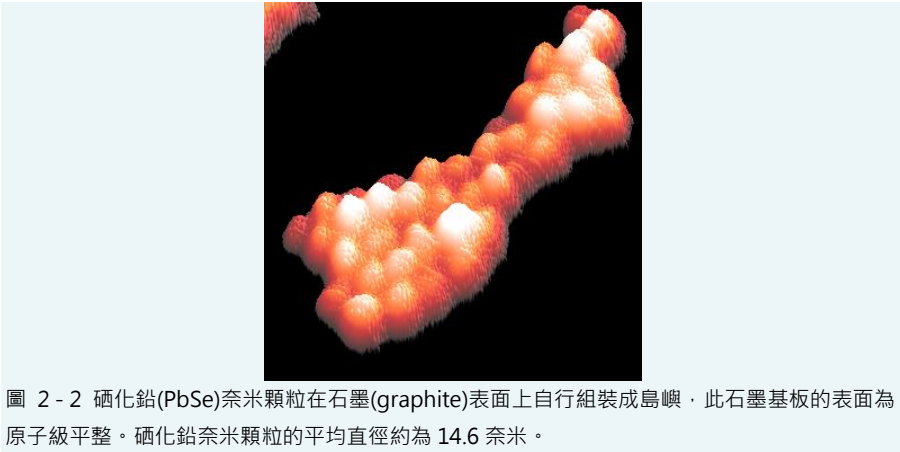


圖 2-2 硒化鉛(PbSe)奈米顆粒在石墨(graphite)表面上自行組裝成島嶼，此石墨基板的表面為原子級平整。硒化鉛奈米顆粒的平均直徑約為 14.6 奈米。

它們的尺寸該如何測量呢？

做任何的物理測量，就像我們前面所提都只是比較。一開始手上有一台奈米放大鏡的時候，就要找標準樣品來循序做校正的動作，一般用半導體技術-光微影蝕刻-製作標準樣品，先用其它顯微鏡確認過長度與高度，然後用手上的奈米放大鏡測量標準樣品，測量出來的長度與高度，如果與標準樣品真正的長度與高度不同，這時就要啟用奈米放大鏡的校正功能來修正。用修正過後的奈米放大鏡觀察到的樣品尺度，即可準確測量到某一個誤差範圍內。

所有測量得到的物理量(如速度、加速度、光強度等)單位，都可以使用長度、質量與時間三種測量單位來表示，因此長度、質量與時間便成為所有其它物理量單位的基礎物理量，如何找到這三個基礎物理量的“標準”值，來比較出待測物的測量值，便是本章的基礎課題。

我們在測量上使用國際標準單位(System International unit, SI unit)。在國際標準單位下，長度以公尺作單位，質量以公斤作單位，而時間以秒作單位。一般我們為了要統一比較的標準，會定義出一個不隨時間、空間而改變、不容易腐蝕破壞的長度、質量與時間的標準，讓世界各地的實驗室能夠比較與測量。

在早期，會製作好一公尺、一公斤等測量的標準，存放在國際度量衡局 (International Bureau of Weights and Measures, 常用為法文的縮寫 BIPM)，世界各國再依此標準複製，成為長度、質量與時間的比較基準。以下分別對現在的長度、質量與時間比較基準做說明：

#### 1. 長度比較基準-公尺

早期十九世紀開始，認為地球的大小可能不容易隨時間而改變，因此以赤道到北極之弧長的十萬分之一 ( $1/100000$ ) 長度，定義為一公尺。簡單以地球平均半徑約  $r = 6.37 \times 10^6$  公尺來計算，赤道到北極之弧長約為  $2\pi r / 4 = 1.0006 \times 10^7$ ，再取十萬分之一，確實是接近一公尺。但地球似乎是會隨時間而緩慢的變化，而且也不是一個完美球型對稱的形狀。

**訂定光行進的距離標準** 自從愛因斯坦提出狹義相對論後，科學家認識到在同一座標中，光在真空中傳播的速度是不變的，而且換到另一個以等速度相對移動的座標中，在此新的座標中，光速(真空環境下)還是恆定不變，所以科學家意識到光速在任何座標下都是恆定的，因此 1983 年國際度量衡大會 (General Conference on Weights and Measures, 常用法文縮寫為 CGPM) 以光在真空中行走 299,792,458 分之一秒的距離，定義為一公尺，以此為長度比較基準。

**英制** 世界各國除了以 CGPM 為長度標準單位，還有其它常見的單位，譬如英制的長度單位。雖然英國已多數採用國際標準單位，但英制單位卻還是在美國廣泛的使用。以目前地球村的趨勢，讀者未來還有許多機會到美國，或者是在實驗室看到許多英制單位的儀器表頭。大家應該提高知識(know how)來避開在異國或是實驗室中的危險性，所以還是有認識基本英制單位的需要：在早期用個人的身體長度來測量長度，例如用腳來當測量工具(長度約 25-30 公分)，因而有英制的長度單位英尺(ft)，一英尺為十二英寸(inch)，一英寸為 2.54 公分，而一英尺為 30.48 公分。

英制中較長的長度單位為英里(mi)，一般美規、歐規汽車的里程數與時速用英里為單位，在台灣高速公路汽車行駛時速約 100 公里，所以在美國輕鬆加速到 100 英里，但實際時速已高達 160.9 公里。

英制的重量單位是磅，較小的重量單位是盎司(一般餐館用餐尤其是牛排館會看到的重量單位)，一磅重為 0.454 公斤重。

除了單純的長度、質量與時間標準單位外，這些單位影響到的其它物理量單位也很重要。在實驗室裡常看到高壓氣瓶、液態氮筒與液態氬筒等實驗用品，為了提高警覺性與安全性，這些用品都會外加一個壓力計的錶頭，有的錶頭上面只有 PSI 英制壓力單位 (1 PSI 為每平方英尺一磅重的壓力，一大氣壓為 14.7 PSI)。譬如在實驗室看到液態氮筒上的壓力計

錶頭讀出 147 PSI，同學若無足夠的物理知識便無法判斷危險性而忽略掉適時洩氣的安全動作。

## 2. 時間比較標準-秒

在 1967 年以前以平均太陽日的 86,400 分之一為一秒，在 1967 年後，用銻 133 金屬原子製造的原子鐘(atomic clock)為標準。銻 133 原子最外層電子 6s 軌域上的電子，在外加磁場下，可觀察到此電子磁矩與原子核磁矩耦合下的超微分裂結構(hyperfine structure)，這些超微能階的能量差異恰巧為微波(光)的能量，超微能階所對應的光振盪 9,192,631,770 次為一秒鐘的標準。

在外國可以購買到強調達原子鐘等級的手錶，一般估計需經過 1,400,000 年後才會有一秒鐘的誤差。手錶的原子鐘是透過無線電波傳訊來校正手錶，只有在有無線電波的區域範圍內，才會自動校正。此外美國國家標準局(National Institute of Standards and Technology, NIST)在 2004 年發表了一款小到約晶片大小的銻原子鐘，幾乎可以達到真正銻原子鐘等級的手錶。

## 3. 質量比較標準-公斤

質量的標準-1 公斤，是由鉑銻合金(platinum-iridium alloy)做的柱狀品，目前擺放在法國的國際度量衡局(BIPM)。

## 常見符號與物理量

隨著電子產品的普及化，大家手邊都有個人電腦，談到電腦的功能通常都會提到記憶體有多大，硬碟有多大或是中央處理器(CPU)有多快等。早期是以千位元組(kilo Bytes, k Bytes)來計算記憶體，當記憶體需求越大時，開始改用百萬位元組(Mega Bytes, M Bytes)到十億位元組(Giga Bytes, GBytes)的記憶體，甚至有兆位元組(Tera Bytes, T Bytes)的硬碟。電腦用二進位計算，而我們用十進位計算，所以一般我們提到一千位元(1 k Bytes)，對電腦而言是設計成 1024 而不是 1000 位元，同樣的 1 M Bytes 是指  $2^{20}=1048576$  位元組。

近年奈米科技很熱門，所謂的奈米(nanometer, nm)只是一個很小、接近原子尺寸的長度，一奈米為十億分之一公尺。科學家之所以研發到奈米尺度，也是因應半導體製程與電腦科技發展，為了在電腦的中央處理器(CPU)裡放入更多電晶體等電子元件，所以半導體製程技術必須要刻畫出更精密細微的電線。從早期的印刷電路板刻畫出毫米(millimeter, mm)寬的電線，到近期使用黃光微影蝕刻技術刻畫出微米(micrometer,  $\mu\text{m}$ )寬的電線，最後再進展到用深紫外線曝光技術刻畫出次微米(sub-micrometer)與小於一百奈米(100 nm)寬的電線。因為現今半導體製程與電腦科技進步，讓我們可以更輕易的探索到接近原子大小尺度下的物理世界。

比原子還小的尺度就是原子核的領域，原子核直徑約一飛米(femto meter,

fm) · 原子核的世界多半只出現在實驗室或是有核能反應的地方 · 在人類能夠操控且室溫下有穩定狀態的最小尺度應該屬奈米尺度 · 奈米是涵蓋幾個原子到幾百個原子的尺度 · 飛米的長度因太小(比原子小十萬倍)所以較少聽到 · 反而一般較長聽到的是飛秒(femto second, fs) · 譬如飛秒雷射(飛秒突波的雷射光) · 未來如把時間縮短到比飛秒短 · 將有機會可以探索到原子與電子的動態行為 ·

表 2-1 代表十進位數的符號

| 縮小         |              | 放大        |         |
|------------|--------------|-----------|---------|
| $10^{-3}$  | mili, m      | $10^3$    | kilo, k |
| $10^{-6}$  | micro, $\mu$ | $10^6$    | mega, M |
| $10^{-9}$  | nano, n      | $10^9$    | giga, G |
| $10^{-12}$ | pico, p      | $10^{12}$ | tera, T |
| $10^{-15}$ | femto, f     | $10^{15}$ | peta    |
| $10^{-18}$ | atto, a      |           |         |

認識物理的第一步驟從觀察與測量開始 · 因此對於長度、質量與時間的比對標準 · 需培養一點感覺 · 或者可說是“物理直覺” · 我們對於生活週邊的尺度感覺 · 例如教室長、寬、高各是多少公尺？飛機的時速約多少公里？一般成人體重多少公斤？一輛汽車多少公斤？一天有多少秒...等等 · 除了生活週邊的尺度感覺外 · 物理課程也深入關心地球半徑多少公里？氫原子多重、多大等問題 ·

表 2-2 物理學常用的物理量

|        |  |
|--------|--|
| 地球平均半徑 | $6.37 \times 10^6 \text{ m}$   |
| 氫原子半徑  | 0.0529 nm  |
| 質子的直徑  | $10^{-15} \text{ m}$   |
| 氫原子質量  | $1 \times 10^{-3} / (6.02 \times 10^{23}) \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |

## 原子質量與物質密度

簡單觀察物體的顏色、尺寸大小等外觀的物理量 · 有時候會高估或是低估這個物體的重量(質量) · 此時需要有物體密度(符號  $\rho$ , density)這個物理量 · 想像在一個特殊的場景下 · 你要潛入一個秘密基地取得體積約 1000 立方公分的立體圖騰 · 並且帶著它快跑逃離基地 · 路程約 3 公里 · 你進入基地後看到有三種不同材料做成立體圖騰 · 而你只能選擇其中一個帶走 · 這時候就必須對不同材料的物體密度有所感覺 · 物體密度的定義  $\rho = m/V$  ( $m$  為物體的總質量  $V$  為物體的總體積)為每單位體積物體的質量 · 以一般常見金屬而言 · 密度相差可以達七、八倍：

表 2-3 密度值差異大的幾種金屬物體

| 金屬材料種類          | 物體密度  |
|-----------------|---|
| 金, Gold, Au     | 19.3 g/cm <sup>3</sup> , 19.3×10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup> |
| 鉛, Lead, Pb     | 11.3 g/cm <sup>3</sup>  |
| 銅, Copper, Cu   | 8.93 g/cm <sup>3</sup>  |
| 鋁, Aluminum, Al | 2.7 g/cm <sup>3</sup>   |

如果前面提到的潛入取得立體圖騰你選擇了黃金，那就要背著約 19.3 公斤重的圖騰逃離現場，這樣的重量大概是到玉山露營十天所揹的大背包重量，揹這樣的重量大概較不易逃離基地吧！

例題 2-1：一塊立方體的鋁體積為 1 立方公分，已知鋁原子一莫耳有  $6.02 \times 10^{23}$  個原子，質量為 27 克，試問此立方體內有多少個原子？

|               |  |
|---------------|--|
| 鋁物體密度為        | 2.7 g/cm <sup>3</sup>                                  |
| 可以推算出 1 立方公分有 | 1×2.7 克  |
| 2.7 克的鋁為      | 2.7/27=0.1 莫耳  |
| 因此共有          | 0.1×(6.02×10 <sup>23</sup> )=6.02×10 <sup>22</sup> 個原子 |

## 2.2 維度分析

維度分析的基本想法來自於第 2.1 章所提到的：長度、質量與時間為物理量單位的基礎。如果把長度用  $L$  表示、質量用  $M$  表示、而時間用  $T$  來表示，這時候速率原本是每單位時間走的距離，就可以表示為  $LT^{-1}$ ，而加速度的定義，也就是在國際標準單位下口語化所說的“公尺每秒平方”，則表示為  $LT^{-2}$ 。這樣的表示法有甚麼好處？主要是讓我們有跡可循地檢查所推導物理公式的正確性，譬如我們後面會推導的等加速度運動的公式

$$v_f = v_i + a_0 t$$

其中  $v_f$  是末速度且維度為  $LT^{-1}$ ， $v_i$  為初速度， $a_0$  為一個常數加速度且維度為  $LT^{-2}$ ， $t$  為時間且維度為  $T$ 。在這裡初速度與末速度是指同一個物理量，所以只要確定  $a_0 t$  的維度是否與速度相同即可。 $a_0 t$  的維度為  $LT^{-2} \times T = LT^{-1}$  與速度的維度相同，這個計算結果在維度分析下判斷這個物理公式的推導正確。以下列出幾個不同物理量的維度供參考：

表 2-4 維度分析

| 物理量  | 符號     | 維度表示            |
|------|--------|-----------------|
| 面積   | $A$    | $L^2$           |
| 體積   | $V$    | $L^3$           |
| 速度   | $v$    | $LT^{-1}$       |
| 加速度  | $a$    | $LT^{-2}$       |
| 力    | $F$    | $MLT^{-2}$      |
| 壓力   | $P$    | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| 物體密度 | $\rho$ | $ML^{-3}$       |
| 能量   | $E$    | $ML^2T^{-2}$    |
| 功率   | $P$    | $ML^2T^{-3}$    |

例題 2-2: 在推導公式的過程中, 只知道最後加速度  $a$  與半徑  $r$  的某次方及速度  $v$  的某次方有關, 也就是  $a = kr^m v^n$ , 其中  $k$  是零維度的常數。請用維度分析來找出正確的公式。

|               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| 加速度 $a$ 的維度為  | $LT^{-2}$                     |
| 半徑 $r$ 的維度為   | $L$                           |
| 速度的維度為        | $LT^{-1}$                     |
| 此公式的維度分析結果    | $LT^{-2} = (L)^m (LT^{-1})^n$ |
| 會得到兩個變數的線性方程組 |                               |
| 對長度 $L$ 而言    | $m + n = 1$                   |
| 對時間 $T$ 而言    | $-n = -2$                     |
| 解此方程組可以得到     | $n = 2$ 與 $m = -1$            |
| 最後找到正確的公式     | $a = k \frac{v^2}{r}$         |

## 2.3 單位轉換

大概在國小數學的階段, 我們已經學習到基本的單位轉換概念, 其實就是把單位放到運算式裡, 確認是放在分子或是分母的位置, 然後依據數學分數的分類、約分或通分等計算技巧來處理。分類是將數字與單位分開, 不同的單位又要分開處理或者是轉換成長度、質量與時間基本物理量單位。約分是指分子與分母同時除以一個數, 或是同時除以一個物理量單位。以下用幾個例子來說明:

例題 2-3: 一把長尺有 12 英寸長, 換算成國際標準單位, 長度應該是多少公分?  
先把原本長度與單位寫下  $12 \cdot \text{inch}$



再把單位轉換帶入計算

$$12 \cdot \text{inch} \times \frac{2.54 \cdot \text{cm}}{1 \cdot \text{inch}}$$

用約分與乘法計算

$$12 \times \frac{2.54 \cdot \text{cm}}{1} = 30.48 \cdot \text{cm}$$

這把長尺換成國際標準單位長度為 30.48 公分

例題 2-4：從桃園出發(高速公路標示為 55 公里處)到新竹(高速公路標示為 97 公里處)，美規汽車的里程表一共增加多少英里？

先算出以公里為單位的里程數

$$97 - 55 = 42 \quad (\text{公里})$$

作單位換算

$$42 \cdot \text{km} \times \frac{1 \cdot \text{mi}}{1.61 \cdot \text{km}}$$

計算結果

$$\frac{42}{1.61} \text{mi} \cong 26 \cdot \text{mi}$$

所以桃園到新竹約增加 26 英里的里程數

稍為複雜一點的問題，分子與分母的單位同時作轉換，譬如速度這個物理量，同時有長度與時間兩個單位，單位轉換如下：

例題 2-5：一量汽車行駛在速限 100(公里/時)的高速公路上，它的速度是 38(公尺/秒)，試問這輛汽車是否超速？

把汽車行駛的速度做轉換來比較

$$38 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 38 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1 \cdot \text{km}}{1000 \cdot \text{m}} \times \frac{3600 \cdot \text{s}}{1 \cdot \text{h}} = 136.8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

可以換算得到汽車速度約為 140(公里/時)，所以這輛汽車超速。

## 2.4 數量級

一般我們在回答台灣人口數的時候，大概不會聽到二千三百二十五萬二千三百九十二個人這麼詳細的數字，反而是會回答約二千三百萬人。原因之一是人口數目隨時在變動，另一個因素是不需要詳細知道那麼多位數。科學家在測量物理量的時候，也會根據測量或是分析推測的準確度來提供數據，如果沒有辦法準確提供至兩位以上的數字，我們會希望所提供的一位數，它的準確度至少要在同一個數量級以內。

那甚麼是數量級呢？因為我們日常使用 10 進位的數字，所以以 10 的幾次方，即把數字轉換成以 10 為基底，且指數為整數時的表示法，用來當作數字

的數量級表示。換句話說，就是找到與實際數目最接近 10 的  $n$  次方的數( $10^n$ )，譬如  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ , ...。因為要把測量結果歸類後以 10 為基底且指數為整數的表示法，也就是 10 的倍數的數量級表示法，所以第一步是以科學記號來表示原本的數，下一步便是把科學記號表示的數，歸類到 10 的倍數的數量級下。

在第二個步驟裡，為了要歸類到 10 的倍數的數量級下，所以要決定科學記號的整數位數與小數位數，該歸類為數字 1 或數字 10。這樣的歸類方式與四捨五入的概念不一樣，因為在歸類為數字 1 或是數字 10 的時候，我們是以 10 為基底的指數來判斷。當科學記號數字小於  $10^{0.5}(\sqrt{10})$  的時候，它的小數部位會被捨去，而變成指數為零的  $10^0$ ，也就是數字 1。反之當此科學記號的數字大於  $10^{0.5}$  時候，指數的小數部位會進位變成 1，這樣的結果就被歸類到  $10^1$ ，也就是 10 的數量級。

例題 2-6：2011 年某月台灣人口數為 23,252,392 人。(A)請用科學記號表示到小數第二位。(B)請用數量級表示。

1、科學記號表示改寫為  $2.3252... \times 10^7 \cong 2.33 \times 10^7$  (人)

因 2.33 小於  $10^{0.5} = \sqrt{10} \cong 3.162$

2、數量級表示為  $10^7$  (人)。

例題 2-7：請用數量級表示亞佛加厥常數。

亞佛加厥常數為  $N_A \cong 6.02 \times 10^{23}$

因科學記號的數字 6.02 大於  $\sqrt{10}$ ，因此數量級表示為  $10 \times 10^{23} = 10^{24}$

## 2.5 有效位數

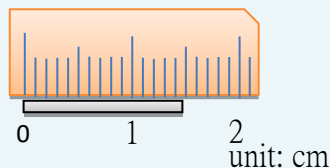


圖 2-3 用尺規測量待測物的長度，尺規的最小刻度為 1 毫米，則測量的結果可以準確到毫米，並且估算到毫米的下一位數(0.1 毫米)。

**圖 2-3** 為最常見的長度測量，尺規的最小刻度為 1 毫米，圖中灰色長柱物體的長度，從物體與尺規的比較結果得到 14 毫米，測量到的數字 14 為兩位數準確值，此外灰色長柱物體的長度落在 14 與 15 毫米的刻度間，因此完整的測量數字應該是 14.7 毫米，其中 0.7 是因為灰色長柱物體落在較靠近 15 毫米所估計的值。因此，**圖 2-3** 測量到灰色長柱物體的長度為 14.7，有效位數為三位數(包括 1, 4, 7)，準確數字有兩位數(1 與 4)，估計值為一位數(7)。

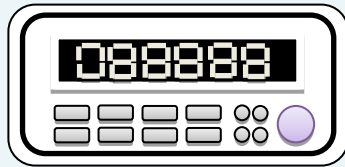


圖 2-4 測量電性(電壓、電流、電阻)常用的電表。

**圖 2-4** 為電表的示意圖，從數字螢幕上可以判讀為 5 又(1/2)位數的電表，第一位數字的表示方式只有 0 跟 1，因此稱為 1/2 位數，後面有 5 位數字的表示。一般電表外接的電路在符合低雜訊與高精密度測量標準的時候，最後一位數字是估計值，但因大部分外接電路的雜訊大，因此從電表上觀察到穩定不變的位數的下一位才是估計值。譬如觀察到 1102X(單位為毫伏特, mV)，且十位數連續不斷變化，惟因數字 2 出現次數高，所以估計該值為 2，此時測量到 11020 mV，有效位數為四位，其中前三位(1, 1, 0)為準確值，最後一位(2)為估計值。

除了以測量方式來直接取得有效位數的數據外，我們在處理數據中，常需要加、減、乘、除四則運算，因此還需學習處理加減乘除運算過後的有效位數。有效位數的取法只有以下兩個規則：

1. 乘法與除法運算時候，以最少有效位數為最後的有效位數。
2. 加法與減法運算時候，先找到最大估計值位數，加總計算後再四捨五入到最大估計值位數即為有效位數。

例題 2-8：乘法與除法的有效位數練習，其中紅色數字為估計位數。

- (a)  $2.00 * 6.10 = 12.2000 \cong 12.2$  (乘數與被乘數都是三個有效位數，因此取三位)
- (b)  $2.1 * 6.112 = 12.8352 \cong 13$  (計算後取最少有效位數為兩位)
- (c)  $2.02 / 3.3 = 0.612121... \cong 0.61$  (計算後取最少有效位數為兩位)

例題 2-9：加法與減法的有效位數練習，其中紅色數字為估計位數。

- (a)  $1.001 + 0.21 = 1.211 \cong 1.21$  (計算後以最大估計值位數以上為有效位數)

$$(b) \quad 121.5 - 11 = 110.5 \approx 111$$

例題 2-10：一個長方形的常為  $3.21 \pm 0.01$  公分，寬為  $1.7 \pm 0.2$  公分，它的面積大小為何？

|          |   |
|----------|---|
| 面積為長乘寬   | $(3.21 \pm 0.01) \times (1.7 \pm 0.2)$                    |
| 展開為      | $3.21 \times 1.7 \pm 0.01 \times 1.7 \pm 3.21 \times 0.2$ |
| 先計算乘法    | $5.457 \pm (0.017) \pm (0.642)$                           |
| 取有效位數    | $5.5 \pm (0.659)$   |
| 誤差在估計值位數 | $5.5 \pm 0.7$   |

前面所提在使用電表時，一次測量觀察到  $1102X$  mV，有 4 個有效位數。如觀測 9 次以上，把數據紀錄下來，再利用統計方法，也就是把 9 次以上的數據加起來，這時候我們的有效位數會因為加法運算，而變成 5 個有效位數。加法運算後的數再除以觀測的次數，因為觀測的次數都是準確值(沒有估計值)，所以還是 5 個有效位數，比一次測量多一位有效位數。這就是多次觀察紀錄求平均值會減少實驗誤差的道理，通常誤差值與觀察紀錄的次數  $N$  成反比，即為  $1/\sqrt{N}$  的關係，因此實驗次數越多所得到的數據誤差越小。實際上還有其它影響因素，所以不一定會達到  $1/\sqrt{N}$  縮小誤差的理論預測值。

## 習題

1. 已知氧原子量為 16 克，試計算一個氧原子的質量為何？其數量級大小為何？
2. 在推導公式中找到能量  $E$  與動量  $p$  及速度  $c$  有關，即  $E = c^m p^n$ ，請用維度分析找出正確的公式。
3. 已知繩波的速度  $v$  與單位長度的質量  $\lambda = m/L$  及張力  $T$  之間有  $v = \lambda^m T^n$  的關係，請用維度分析找正確公式。
4. 已知高速火車的最高時速為 180(英里/小時)且加速度為 1.2(英里/小時/秒)，試作單位轉換將速度與加速度轉換成國際標準單位。
5. 一個圓形的半徑為  $2.52 \pm 0.01$ ，設圓周率為 3.142，試計算其面積。