第三章 一維運動(One-Dimensional Motion)

有關一維運動在以前高中課程 - 牛頓力學，大家應該已經學得很透徹，在這裡回顧一維運動是為了進入新的數學處理方式：如何區分向量與純量及微分與積分的計算方式，所以我們用熟悉的物理 - 一維運動，來引導大家進入新數學工具世界。

大學普通物理課程裡，在本書第十章 - 轉動學以前的章節，都是大家在高中時期已經學習過且非常熟悉的內容，所以要藉著大家熟悉的內容來引進新數學工具，並熟悉利用力等式寫出微分方程式的新概念(第六章以後的內容)。在開始學習轉動學的章節後，會大量使用這些新工具與新物理理論概念(力等式概念)，而同學通常在前面章節感覺內容簡單與輕鬆學習，但在轉動學之後的章節，就有部份的同學跟不上進度了。

一維運動一開始先把物體體積縮小，但質量不變，一直縮小到成為質點且質點位置就在物體的質心位置。質點只有位置，沒有體積且不佔空間。現在有了質點概念後，還需有向量與純量兩種不同物理量的概念，首先我們從質點的位置開始了解這兩種物理量的差異性為何。

3.1 一維運動之位置，速度與速率

圖：緞帶曲折->緞帶拉直

圖 3 - 1

要開始記錄物體與質點的一維運動行為，首先需記錄物體所在位置。一維運動我們可以想像成走路的路線（直線），如果只能往前走或是往後走，而且都只能待在直線上，即便一開始這條路線在三維空間看來是曲折蜿蜒、扭來扭去且沒有交叉點，也可以用變數學魔術的方法，把所走的路線對應轉換成一條直線。一維運動被限制在這條直線上，就像是火車只能走在鐵軌上。

如果一開始站在這一維路線上的一個點(稱為原點)，分不清往前走十個長度單位，或是往後走十個單位，接下來的任何移動又分不清往前或是往後，那便無法計算出與原點的距離是多少。另一方面，我們生活中往前與往後也不是對稱的，如我們的眼睛目視前方而沒有對稱性的長在後方，我們設計的火車有車頭與車尾的區別，這些前後不對稱的因素也使我們必須分清楚前與後的方向

不同。

位置向量

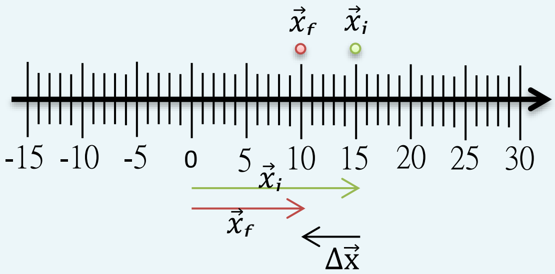

圖 3 - 2 一維座標系統，綠點為物體起點位置，紅點為物體終點位置。

要測量一維空間中物體的移動，首先要定義出一維的座標系統與向量的表示法。圖 3 - 2 為一維座標系統，這條路線具備方向性，可以看到箭頭向右邊，代表往右邊為正(+)的方向，反過來往左走就是反箭頭也就是負(-)的方向。此外，這條路線一定有個原點 0 與相同大小的單位 - 1 個長度單位。有了一維座標這條路線，就可以記錄物體(質點)的位置(也稱為位置向量)。圖 3 - 2 中的綠點為物體起點位置，用 $\vec{x}_i$ 表示起點位置向量，紅點位置為物體移動的終點位置，用 $\vec{x}_f$ 表示終點的位置向量。

什麼是位置向量呢？我們由圖 3 - 2 的綠色箭頭與紅色箭頭可以看出端倪。位置向量總是由原點指向物體位置的箭頭向量，所以物體在原點右方大於 0 的位置時，是正的方向即是座標箭頭的方向；物體在原點左方小於 0 的位置時，是負的方向也就是反箭頭的方向。

一般我們定義圖 3 - 2 往右方向的座標給予一個 x 方向，與第一章節所提二維 $x-y$ 座標的 x 方向相同。此外，為了簡化向量的表示，我們使用 $\hat{x}$ 或 $\hat{i}$ 的符號來表示往右的單位向量。單位向量是指長度為 1 個單位，所以可以把單位向量當作方向向量。

我們不能每次都畫一條數線與位置向量這種類似幾何圖形來記錄物體位置，因此需把向量用符號表示並用代數計算。前面學到一維座標系統正的方向可以用 $\hat{x}$ 或是 $\hat{i}$ 的符號來表示，圖 3 - 2 物體的起點位置在+15，因此起點位置向量用符號表示為

$$\vec{x}_i = 15\hat{i}$$

相同的道理，終點為 $\vec{x}_f = 10\hat{i}$ 。

位移向量

物體在圖 3 - 2 的移動與方向為何？物體由起始位置移動到終點位置，它的移動與方向為向左移動 5 個長度單位，也就是 $-5\hat{i}$ (如圖中黑色箭頭所示)，該如何由它的位置向量取得這個結果呢？

物體的移動與方向定義為位移(亦可說是位移向量)，用符號 $\Delta\vec{x}$ 表示，Δ 為變化量的意思，$\Delta\vec{x}$ 代表在 x 座標軸方向上的位移變化量。藉由位置向量圖 3 - 2，我們可以計算物體位移的方法即是終點位置向量減去起點位置向量：

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = 10\hat{i} - 15\hat{i} = -5\hat{i}$$

計算結果與圖示相同。在後續解題計算中，我們會漸漸省略掉繪圖的過程，直接用數字與代數來解決問題。

距離

在過去的學習進度中，一般先學純量再學向量，在本章節要先學向量。純量即是向量的長度，譬如位移向量的長度(不管方向)是距離，後面學到平均速度的大小是平均速率，因此要學習如何由向量中找到大小(長度)的線索。

計算向量的大小是藉由向量內積(後面章節會學到)的計算，同一個向量對自己內積（向量·向量）會得到該向量長度的平方值。在一維座標系統中，剛好向量內積的值為座標上數字的平方，而內積開根號後的向量大小值與座標上的數字取絕對值相同。因此在一維坐標系統下，計算向量的大小與長度相同，也與取絕對值的計算相同。

圖 3 - 2 中物體的移動距離，先求出位移向量後，再把位移向量的大小計算出來

$$\left|\Delta\vec{x}\right| = \left|\vec{x}_f - \vec{x}_i\right| = \left|-5\hat{i}\right| = \left|-5\right| \times \left|\hat{i}\right| = 5 \times 1 = 5$$

在這裡符號$\left|\ \right|$代表計算向量的長度(大小)，但對於數字符號$\left|\ \right|$的運算即是取絕對值的意思，而$\left|\hat{i}\right|$符號代表取出 x 坐標軸單位向量 $\hat{i}$ 的大小，單位向量的大小(長度)為 1。

平均速度

有了起點向量與終點向量，且計算出起點到終點的位移向量後，我們可以開始探索物體的運動學。首先需知道物體在起點的時間 t_i 與在終點的時間 t_f，然後就可以計算出該物體從起點到達終點之間的平均速度，平均速度定義為起點到終點的位移向量除以所需的時間

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i}\ 。$$

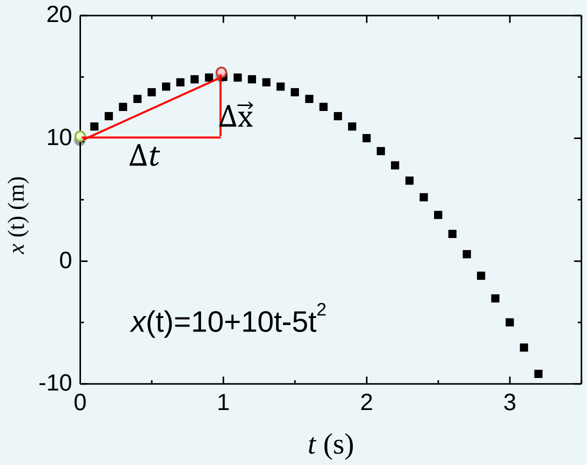

圖 3 - 3 物體在一維座標系統中的位置(放在 y 軸)與時間(放在 x 軸)圖。

圖 3 - 3 為物體的位置與時間關係圖，如起點位置在 $\vec{x}_i = 10\hat{i}$ 且終點位置在 $\vec{x}_f = 15\hat{i}$ ，把一維座標系統的位置向量放 y 軸、時間放 x 軸，則起點到終點的平均速度如圖中紅色三角形所示為斜邊的斜率，即是短邊 $\Delta\vec{x}$ 除以長邊 Δt 的大小再乘上指出速度方向的單位向量 $\hat{i}$ 。此時的平均速度為

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{15\hat{i} - 10\hat{i}}{1-0} = 5\hat{i}\ \text{(m/s)}$$

平均速率

平均速率是平均速度的純量化，後續章節所有的純量都是先計算出相對應的向量後，才由向量求出長度大小的純量值。所以平均速率的算法如下

$$v_{avg} = \left|\vec{v}_{avg}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{x}\right|}{\left|\Delta t\right|}$$

可以用平均速度取向量長度，也就是取絕對值來計算，或是以距離 $\left|\Delta\vec{x}\right|$ 除以時間間隔 $\left|\Delta t\right|$ ，平均速率為大於或等於零的值，因此 Δt 要取絕對值，惟一般 Δt 是較晚的時間減去較早的時間所以大於零。

表 1-1 純量與向量對照表

向量	純量
位置向量	實數
位移	距離

例題 3-1：一粒子在一維座標系統 x 軸上運動，記錄下時間為 1 秒時位置在 $12\hat{i}$ (公尺)，時間為 3 秒時位置在 $4\hat{i}$ (公尺)處，請算出該物體在此時間內的位移、平均速率與平均速度。

題目已提供起點位置向量與時間 $\vec{x}_i = 12\hat{i}$ (m), $t_i = 1$ (s)

終點位置向量與時間 $\vec{x}_f = 4\hat{i}$ (m), $t_f = 3$ (s)

可計算出位移向量 $\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = 4\hat{i} - 12\hat{i} = -8\hat{i}$ (m)

欲計算平均速率前先算其對應向量-平均速度

平均速度為 $\vec{v}_{avg} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{-8\hat{i}}{t_f - t_i} = \dfrac{-8}{3-1}\hat{i} = -4\hat{i}$ (m/s)

平均速率為 $v_{avg} = \left|\vec{v}_{avg}\right| = 4$ (m/s)

由上述的解題方式，你是否發現到我們不再依賴繪圖來解問題。

3.2 瞬時速度與瞬時速率

在這裡因為學習到瞬時的概念而引入第 1.7 章微分的計算，同時要提醒各位同學，運動學是高中已學過且熟悉的章節，在此時引入微分與積分的新數學物理計算方法，所以務必要認真學習、熟練此計算方式，以避免進入轉動慣量等高中不熟悉的章節後，同時要學習使用微分積分解決問題時，容易增加後續的學習障礙。

瞬時速度

瞬時速度的定義起因於平均速度的計算，平均速度為起點與終點的位移除以時間間隔，當終點的位移與時間點慢慢往起點靠攏，終至完全與起點的位置向量及時間點重合時，此時我們可以得到起點的瞬時速度。瞬時速度定義如下：

$$\vec{v} = \lim_{t_f \to t_i} \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

與第 1.7 章相結合，我們可以把位置向量寫成是時間的函數，因此瞬時速度是位置向量對時間微分，微分後在起點時間的向量值：

$$\vec{v}(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t_i + \Delta t) - \vec{x}(t_i)}{(t_i + \Delta t) - t_i} = \left.\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right|_{t=t_i}$$

所以計算瞬時速度的方法，是把位置向量寫成時間的函數，微分後就可得到任

一時間的瞬時速度。

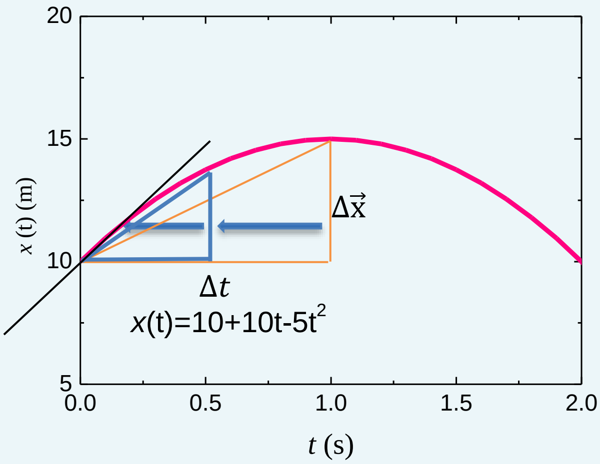

圖 3 - 4 瞬時速度與切線斜率關係圖。

圖 3 - 4 表示平均速度與瞬時速度的差異性，平均速度為三角形斜邊的斜率，當 x 軸的時間間隔 Δt 縮小，由橘色三角形縮減為藍色三角形，且藍色三角形斜邊的斜率更接近黑色切線斜率，當 Δt 縮減至 0 時，此時黑色切線的斜率代表瞬時速度，瞬時速度的圖示恰巧與第 1.7 章 圖 1 - 8 所示的微分計算完全相同，由此可證位移向量對時間微分即可算出物體的瞬時速度。

瞬時速率

瞬時速率為平均速度的純量，因此要先用微分計算出瞬時速度，再取得瞬時速度向量的大小值：

$$v(t)=\left|\vec{v}(t)\right|=\left|\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right|$$

例題 3-2：一質點在一維座標系統 x 軸運動，其位置向量隨時間變化函數為 $\vec{x}(t)=\left(2t^2+t\right)\hat{i}$，其中時間的單位為秒，位移的單位為公尺。請計算該質點任一時間的瞬時速度。請計算 0 秒到 1 秒之間的平均速度。

(a)瞬時速度

瞬時速度為位移向量對時間微分 $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}=(4t+1)\hat{i}$ (m/s)

你也可以用微分的操作型定義來計算

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{x}(t+\Delta t)-\vec{x}(t)}{(t+\Delta t)-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t+\Delta t)^2+(t+\Delta t)-2t^2-t}{\Delta t}\hat{i}$$

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4t\Delta t+2(\Delta t)^2+\Delta t}{\Delta t}\hat{i}=\lim_{\Delta t\to 0}(4t+1+2\Delta t)\hat{i}=(4t+1)\hat{i}$$

$$\vec{v}(t)=(4t+1)\hat{i}\ \text{(m/s)}$$

(b)平均速度

知道微分可以計算瞬時速度後，平均速度反而較難計算且同學要留意題目陷阱，千萬不要誤以為是兩個時間點瞬時速度的平均值。

$$\vec{v}_{avg}=\frac{\vec{x}(t_f)-\vec{x}(t_i)}{t_f-t_i}=\frac{3\hat{i}-0\hat{i}}{1-0}=3\hat{i}\ \text{(m/s)}$$

3.3 特例-等速度運動

在學會用微分計算瞬時速度後，接下來舉一個與速度有關的特殊例子，即等速度運動。高中時期或許同學已經透徹了解等速度運動，現在藉著等速度運動這個特殊例子，我們要學習如何利用積分來解決物理問題。

前面第 3.2 章已經知道速度與位移的關係：

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \tag{3.3-1}$$

如果是等速度運動，那麼速度可以表示為 $\vec{v}_0=v_0\hat{i}$ ，在這個式子裡的〝下標〞0 代表這個變數 v 已經變成常數值，即常數向量 $\vec{v}_0$ 與常數值 v_0 ，代表不會因時間的變化而異動，也可說常數向量或是常數值對時間微分是零向量或是零。亦即：

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt}=\vec{0}=0\hat{i}$$

$$\frac{dv_0}{dt}=0$$

在此等速度特例下 3.3-1 式可以改寫為

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=v_0\hat{i} \tag{3.3-2}$$

可以看到速度的定義為〝位移向量的微小變化量〞($d\vec{x}$)除以〝時間的微小變化量〞(dt)，接下來做一點計算，我們可以把時間的微小變化量移到等號右邊，3.3-2 式便成為

$$d\vec{x}=v_0\hat{i}\,dt \tag{3.3-3}$$

此時等號左邊是位移向量的微小變化量，等於等號右邊的速度向量乘上時間的微小變化量。在第 1.9 章已經提到積分的概念，對於 d 這個符號可以想像成細分到無限小，此外也學到積分符號：

$$\int$$

代表加總的意思。我們可以利用加總把細分過的位移向量找回來：

$$\int d\vec{x} \overset{?}{=} \vec{x}$$

把 3.3-2 式等號左邊與右邊同時用積分符號加總，並且注意積分符號分別有下標與上標。下標代表起始值，就是在起點時間 t_0 的位移向量 $\vec{x}_i$；上標代表想得到的位移向量在時間 t 的結果 $\vec{x}(t)$。3.3-3 式改寫如下：

$$\int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}(t)} d\vec{x} = \int_{t_i}^{t} v_0\hat{i}\,dt \qquad (3.3\text{-}4)$$

要注意我們由 3.3-3 式改寫為 3.3-4 式的條件為：等號左邊只與 $\vec{x}$ 變數相關，而等號右邊只與 t 變數相關。3.3-4 式的積分運算結果為

$$[\vec{x}]_{\vec{x}_i}^{\vec{x}(t)} = v_0\hat{i}[t]_{t_i}^{t}$$

$$\vec{x}(t)-\vec{x}_i = (v_0t-v_0t_i)\hat{i}$$

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_i+v_0(t-t_i)\hat{i}$$

一般我們的起點多設為 $t_i=0$ 時 $\vec{x}_i=\vec{x}_0$，則得到

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+v_0t\hat{i}$$

再改成純量表示，即得到高中時期所熟悉的公式

$$x=x_0+v_0t$$

例題 3-3：一質點以等速度 $\vec{v}_0=5\hat{i}$ (公尺/ 秒)運動，在時間 0 秒時初始位置為 $\vec{x}_i=10\hat{i}$ (公尺)，請推算 10 秒時他的位置在哪？

速度為位移對時間的微分	$\frac{d\vec{x}}{dt}=5\hat{i}$
改寫為變化量形式	$d\vec{x}=5dt\hat{i}$
等號兩邊同時積分	$\int d\vec{x}=\hat{i}\int 5dt$
記得積分符號的上、下標	$\int_{10\hat{i}}^{\vec{x}(t)} d\vec{x}=\hat{i}\int_0^t 5dt$
做積分運算	$\vec{x}(t)-10\hat{i}=\hat{i}(5t)$
整理後得到	$\vec{x}(t)=(10+5t)\hat{i}$
把時間 $t=10$ 代入	$\vec{x}(10)=60\hat{i}$ (m)

第 10 秒時物體位置在 $60\hat{i}$ 公尺處。

3.4 加速度

在這裡除等速度運動特例外，物體的速度隨著時間變化，如我們在騎腳踏車過馬路看到小綠人顯示剩餘的時間時，會用力踩腳踏車踏板讓腳踏車加速通過馬路。汽車在紅燈前停下來，當綠燈亮起時，要踩油門讓車子增加速度開始運動。踩腳踏車時使出更多力氣，速度則會增加更快，開車多踩一點油門，車子加速得更快。這些經驗都告訴我們，加速度的大小會影響速度增加的快慢。

平均加速度

平均加速度為起點與終點的速度差值除以時間間隔，符號定義為：

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$$

因為計算平均加速度大小，與前面第 3.1 與 3.2 章所講的計算平均速度大小內容相同，所以後續的章節就不再強調如何計算物理量的純量。平均加速度的純量為：

$$a_{avg} = \left|\vec{a}_{avg}\right|$$

瞬時加速度

瞬時加速度與推導速度時的概念一樣，當平均加速度的時間間隔為 0 時，可找到在起點的瞬時加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

從微分的操作型定義可以得到簡單的結果，即

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

再利用速度是位移對時間的微分，可以推導出

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

這裡引進兩次微分運算的符號 d^2 / dt^2 。

例題 3-4：有一質點在一為座標系統 x 軸上運動，其位移與時間關係為 $\vec{x}(t) = \left(4 - 27t + t^3\right)\hat{i}$，

其中位移向量的單位為公尺，時間單位為秒。請計算該質點的速度與加速度。

速度為位移對時間微分 $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}=\left(-27+3t^2\right)\hat{i}$ (m/s)

加速度為速度對時間微分 $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{v}(t)}{d}=6t\hat{i}$ (m/s²)

多重曝光記錄物體運動

現在照相機科技功能日異進步，可以用數位相機拍出多重曝光的相片，或是用每秒多張相片拍攝手法，再利用影像處理軟體把多張相片結合成多重曝光的相片，藉由多重曝光來記錄物體運動過程，我們會得到以下的等速度、加速度與負加速度運動下的多重曝光記錄結果：

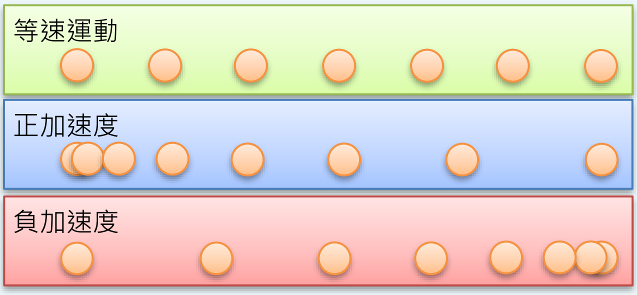

圖 3 - 5 觀察多重曝光運動。

3.5 特例-等加速度運動

在許多不同的加速度運動中，有一個特例為等加速度運動，即加速度為一個常數向量

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0=a_0\hat{i}$$

同學有沒有思考過我們為什麼要在運動學裡學習等速度運動與加速度運動？為什麼不再把加速度對時間微分，討論它對運動有甚麼影響？

我們之所以只學習到加速度，而不需再學習它對時間微分所產生的向量，是因為後續章節中，我們要進一步討論物體運動背後的物理機制-運動定律，而運動定律告訴我們物體受外力影響下僅會產生加速度，沒有其它的物理機制了。等速度運動是不受外力影響下的物體運動行為，而等加速度運動卻是受外力影響下的運動行為，所以我們本章節所學的一維運動學中，要特別把這兩種不同的運動行為(觀察到的物理現象)了解清楚。

在等加速度情況下，由於平均加速度與加速度相同，藉此可以計算出速度與時間的關係：

$$\vec{a}=\vec{a}_{avg}=\vec{a}_0=\frac{\vec{v}(t)-\vec{v}_0}{t-t_0}$$

把這個式子計算整理後，會得到等加速度運動的第一個公式：

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}_0(t-t_0)$$

一般把起點時間設為 0，可以得到

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}_0 t \tag{3.5-1}$$

除了簡單的移動變數方式，我們可以複習用積分的方法來解等加速度運動的問題。從加速度是速度對時間的微分開始推導：

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\vec{a}_0$$

接下來把變數移動到等號的兩邊

$$d\vec{v}(t)=\vec{a}_0 dt$$

對等號兩邊的微小變化量同時做積分加總的動作，可找回瞬時速度，且同學要記得寫上積分的上、下標

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}=\vec{a}_0\int_{t_0=0}^{t} dt$$

計算後可以得到與 **3.5-1 式**相同的結果。這個計算中 $\vec{a}_0$ 是個常數向量不影響積分的運算，因此可以把它提到積分運算外面。

從 **3.5-1 式**的速度關係，我們還可以再使用積分來尋找位移隨時間變化的關係：

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}_0 t$$

一樣的步驟把變數移動到等號的左邊與右邊

$$d\vec{x}=(\vec{v}_0+\vec{a}_0 t)dt$$

同時對兩邊各自的變數進行積分，記得起點的時間與位置要一致：

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}(t)} d\vec{x}=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}_0 t)dt$$

積分後可以得到

$$\vec{x}(t)-\vec{x}(0)=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$$

我們將結果整理成熟悉的等加速度運動的第二個公式

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \tag{3.5-2}$$

下一步驟我們要推導出等加速度運動的第三個公式，而在這個公式的推導過程中，我們會因為加速度、速度與位移都是向量而需多一點數學技巧。第三個公式就是把時間變數拿掉，僅找出速度、加速度與位移距離的關係。首先利用 **3.5-1 式**來把時間變數置換成：

$$\vec{a}_0 t = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \tag{3.5-3}$$

再來為了能把時間從 **3.5-2 式**置換掉，須把該式等號兩邊同乘加速度：

$$\vec{a}_0 \cdot (\vec{x}(t) - \vec{x}_0) = \vec{a}_0 \cdot \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 t^2 \tag{3.5-4}$$

這裡的加速度乘上位移或其它向量時有一個小點的符號，代表向量內積的運算，在後面的章節會再詳細講解向量內積。下一步驟把 **3.5-3 式**帶入 **3.5-4 式**中得到

$$\vec{a}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{v}_0 \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0) + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0)$$

再把等號右邊整理為

$$\vec{a}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot (\vec{v} + \vec{v}_0)$$

把等號兩邊互換並同乘兩倍，再展開速度的內積項為

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = 2\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

最後可得到熟悉的公式

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + 2\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{3.5-5}$$

把向量都改成純量，便成為等加速度運動的第三個公式

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

其中 $s = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ 為距離。

例題 3-5：一輛 BMW 520d 行駛在快速道路上，駕駛看到警車趕緊踩剎車，車子從時速 90(公里/時)降到 70(公里/時)，車子在剎車過程行駛 60 公尺。假設汽車剎車是等加速度運動，請估計該汽車的(a)加速度與(b)踩剎車時間。

從第 3.5 章學習到等加速度運動的三個公式，題目只提供初速度、末速度與距離，研判是使用第三個公式可取得加速度運動的其它物理量。

(a)加速度

初速度單位轉換 $v_0 = 90\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 25$ (m/s)

末速度單位轉換 $v = \frac{70}{3.6} = 19.4$ (m/s)

初速度、末速度與距離帶入第三公式 $19.4^2 = 25^2 + 2a \times 60$

加速度為 $a = -2.07$ (m/s²)

(b)剎車時間

使用第一個公式 $19.4 = 25 + (-2.07)t$

剎車時間為 $t = 2.71$ (s)

例題 3-6：CRT 電視的陰極射線管內有電場可加速電子，假設該區域的長度為 2 公分且為等加速度運動，電子在加速前速度為 2×10^4(公尺/秒)，經過電場加速後的速度為 3×10^6(公尺/秒)，請問電子待在加速的電場內多久時間？

題目提供初速度、末速度與距離，研判使用第三公式

初速度為 $v_0 = 2\times10^4$ (m/s)

末速度為 $v = 3\times10^6$ (m/s)

行走距離為 $s = 2\times10^{-2}$ (m)

帶入第三公式 $(3\times10^6)^2 = (2\times10^4)^2 + 2a(2\times10^{-2})$

其實這個問題同時在考驗你對數量級的概念，因為初速度比末速度小很多，可直接忽略

加速度為 $a \cong \dfrac{(3\times10^6)^2}{2(2\times10^{-2})} = 2.25\times10^{14}$ (m/s²)

在電場內加速的時間

$$t = \frac{3\times10^6 - 2\times10^4}{2.25\times10^{14}} \cong \frac{3\times10^6}{2.25\times10^{14}} = 1.33\times10^{-8} \text{ (s)}$$

例題 3-7：一輛超速汽車以等速度 40(公尺/秒)運動，與警車相遇後，警車在 2 秒後以加速度 3(公尺/秒²)追逐這輛超速的汽車，試問警車在幾秒後追上？

兩秒後該汽車已經超前警車 $40\times2 = 80$ (m)

假設在 t 秒後警車追上超速汽車

此時汽車已行駛 $80 + 40t$ (m)

警車行駛距離為 $\dfrac{3}{2}t^2$

警車追上時兩車行駛距離相同 $\dfrac{3}{2}t^2 = 80 + 40t$

整理為 $3t^2 - 80t - 160 = 0$

時間為 $t = \dfrac{80 + \sqrt{80^2 + 4\times3\times160}}{2\times3} = 28.5$ (s)

3.6 自由落體

日常生活中最常見的等加速度運動就是自由落體。為何自由落體都是等加速度運動呢？這與物體都同樣受重力作用而產生重力加速度有關，也和受外力作用下會產生加速度的(牛頓)運動定律有關。這意味著在我們生活週遭的空間，物理定律-運動定律-的恆定與普適特性，且在地球上所有物體都受一外力影響，而有大小相同朝向地心的重力加速度。地表上的重力加速度約為 9.8(公尺/秒^2)，如能避開空氣阻力等影響因素，任何物體在同一高度自由落下，抵達地面的時間應該相同。

處理自由落體的問題時，把一維座標系統 x 軸移轉到垂直地表方向，箭頭指向上方的座標系統，有時也把 x 軸換成 z 軸。此時重力加速度為 $-\hat{i}$ ，一般寫為

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{i} = -9.8\hat{i}$$

定義出加速度方向後，我們可以使用原本等加速度推導的三個公式：

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) - 9.8t\hat{i}$$
$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(t) - 4.9t^2\hat{i}$$
$$(v(t))^2 = (v(0))^2 + 2(-9.8)(x_f - x_i)$$

自由落體中如果初速度方向朝上(正 $\hat{i}$ 方向)，稱為上拋運動。上拋運動過程中，初速度會隨時間受重力加速度影響縮減到 0，也就是最高點，再繼續由重力加速度增加往下($-\hat{i}$ 方向)的速度。我們可以發現有趣的現象，在物體上升到最高點(速度為 0)後，再往下掉回到起點的高度，這一段上升與下降過程中，他的運動軌跡是對稱的，所耗費的時間亦是相同的，而且在相同高度時速度大小(速率)也是相同，僅差異在速度方向相反。圖 3 - 6 為上拋運動的位置、速度與加速度圖，同學可以藉由此圖，學習欣賞物理世界的特殊對稱性質。

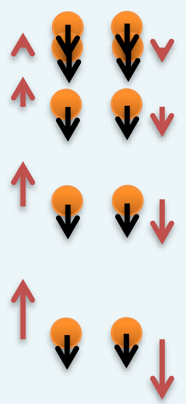

圖 3 - 6 上拋運動之位置、速度與加速度。紅色箭頭代表速度，黑色箭頭代表加速度，上升段與下降段的位置平移錯開。

例題 3-8 : 為了測量大樓的高度，一工程師站在大樓頂靠牆邊以初速度 14.7(公尺/秒)上拋一物體，此物體在 6 秒後撞擊到地面，請問大樓高度？(重力加速度 9.8(公尺/秒 ²))

物體上升到最高點所需時間 $14.7 \div 9.8 = 1.5$ (秒)

上升到最高點後又下降回到工程師位置共 1.5×2=3 (秒)

從工程師位置下降到撞擊地面共需 6-3=3 秒

大樓高度為 $(14.7) \times 3 + 4.9(3)^2 = 88.2$ (公尺)

3.7 積分的幾何意義

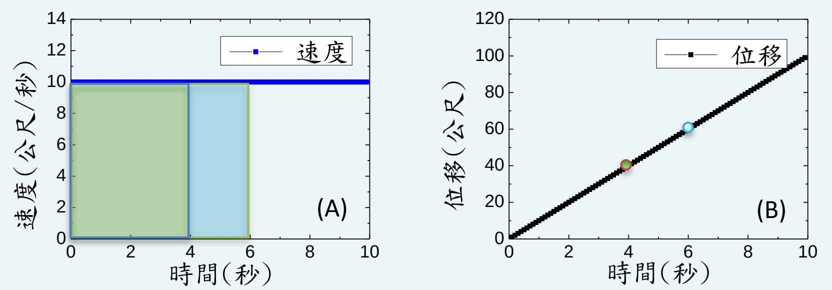

圖 3 - 7 等速度運動之速度-時間(A)與位移-時間(B)圖。

圖 3 - 7 為等速度運動的速度隨時間變化(A)與位移隨時間變化圖(B)。在等速度運動中因速度為恆定(10 公尺/秒)不隨時間變化，當圖 3 - 7 (A)顯示時間由 0 秒到 4 秒之間，物體等速度行進所產生的距離(綠色區域)，面積為 10×4=40(公尺)，恰巧為圖 3 - 7 (B)綠點的位置。接著再觀察物體圖 3 - 7 (A)顯示為 0 秒到 6 秒間等速度行進所產生的距離(藍色區域，此區域包含綠色區域)，面積為 10×6=60(公尺)，亦為圖 3 - 7 (B)藍點位置。

等速度運動的符號運算表示如下：

$$v(t) = v_0 \, , \quad \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v_0 dt$$

$$x(t) = v_0 t$$

從積分運算與圖 3 - 7 的圖形比對結果，可觀察出位移為速度對時間的積分，圖中顯示為速度函數與時間軸之間所圍面積大小。因此對該速度函數積分，等同於計算該函數與變數軸之間所圍面積大小。

習題