第四章 二維運動(Two-Dimensional Motion)

我們在第三章講解一維運動時，特別把原本實數軸的純量概念，改成向量的計算。高中學習一維運動時使用實數軸純量 x，在大學普物課程我們改用位置向量 $x\hat{i}$，其主要用意於可在二維空間中使用一維系統的符號運算。我們更進一步探究第三章一維向量觀念，即可以處理本章的二維向量系統與現實生活中的三維座標系統。其實二維系統很簡單，只需再增加一個實數軸。一般我們以和 x 軸互相垂直的 y 軸為第二個實數軸，把軸上的位置也以位置向量表示為 $y\hat{j}$ (y 軸上單位向量使用 $\hat{y}$ 或 $\hat{j}$ 表示)。因為這兩個軸上的位移各自獨立、互不影響，因此可以用這兩個實數軸來定位二維平面空間上的任一位置，並把位置向量表示成 $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ (一維座標系統的位移符號為 $\vec{x}=x\hat{i}$)。

二維平面空間中質點的位置，可以想像成是投影在一維座標系統 x 上，與投影到另個一維座標系統 y 上，兩個投影點共同指出的位置即是質點。設想在二維的空間平面上有一 P 點，P 點的位置可以用左右方向的光將 P 點的影子投射到一個上下 y 方向的實數軸上;再用上下方向的光將 P 點的影子投射到左右 x 方向的實數軸上。在這樣的投影系統下，如果 P 點左右移動，則投影在上下 y 軸上的影子不會移動；反之如 P 點只有上下移動，那投影在左右 x 軸上的影子位置不變。大家有了投影的概念後，接下來我們繼續來觀察二維空間的位移與距離。

4.1 二維座標系統與向量

二維座標系統

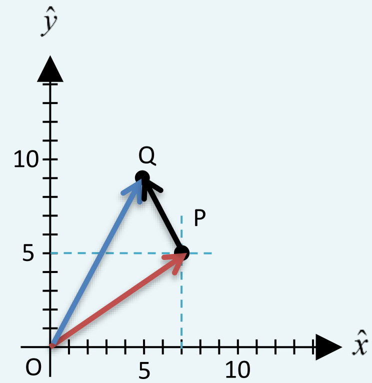

圖 4-1 二維座標系統上的 P 點、Q 點與 PQ 位移。

如圖 4-1 所示，二維空間由左右方向的實數 x 軸與上下方向的實數 y 軸組成，在空間中 P 點的位置可以用座標 $(7,5)$ 表示，也可以位置向量表示。同學回想第三章所提的位置向量，P 點的位置向量是由原點(兩個軸都是 0 的位置)到達 P 點的向量(如圖 4-1 的紅色箭頭)，也說是 OP 向量，以符號 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 與 $7\hat{i}+5\hat{j}$ 表示。

當物體由 P 點移動到 Q 點，Q 點的位置向量 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 為 $5\hat{i}+9\hat{j}$，則物體的位移為 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$。與第三章所學相同，此時我們把 P 點當作是起點 $\vec{r}_i$，而 Q 點當作是位移的終點 $\vec{r}_f$，則二維空間中物體位移向量與距離可以表示為：

$$\text{位移：}\ \Delta\vec{r}=\vec{r}_f-\vec{r}_i$$

$$\text{距離：}\ |\Delta\vec{r}|=|\vec{r}_f-\vec{r}_i|$$

這個例子的 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 位移為：

$$\Delta\vec{r}=\left(5\hat{i}+9\hat{j}\right)-\left(7\hat{i}+5\hat{j}\right)=-2\hat{i}+4\hat{j}$$

其位移的結果為往左兩個單位再往上四個單位，與圖 4-1 中的黑色箭頭表示的方向與大小一致。從這裡位移向量的計算，我們發現到一個很簡單的規則：將物體投影到 x 與 y 軸的位置表示位置向量，而物體分別在 x 與 y 軸上投影點其移動的位移組成二維空間的位移向量。前面我們示範了用位置向量在 x 與 y 軸上的數量相減，可以找到位移向量。

向量加法運算

既然二維空間的位移可以用向量表示，那麼物體連續的位移就可以用向量

的加法來計算。

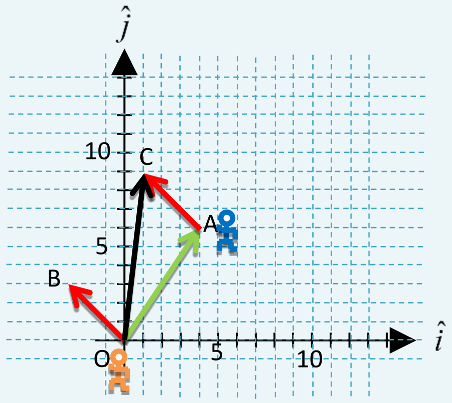

圖 4 - 2 向量加法運算。

首先我們先複習二維空間的向量加法。二維空間向量加法其實與我們日常生活中在平面上的移動相同，譬如圖 4 - 2 用繪圖法回答兩個向量的加法 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，可以想像成先是右四步上六步，再走左三步上三步(〝再走〞的步伐是站在原先已走到的位置上)，$\overrightarrow{OA}$ 即如圖上綠色箭頭的箭頭位置，所以向量加法運算要把紅色箭頭($\overrightarrow{OB}$)從原點平移到綠色箭頭的終點位置(箭頭位置)。與前面所談的位移向量計算方法相同，我們可以把加法運算利用投影在 x 與 y 軸上的投影量來計算，也就是右四步加上左三步結果為右一步(4-3=1)，而上六步再加上三步結果為上九步(6+3=9)，結果等於黑色箭頭所示。

物理向量

物理向量與數學向量的表示法不同。數學向量(如圖 4 - 2 的 $\overrightarrow{OA}$)的箭頭處表示 A 點位置，物理向量用下標表示為 $\vec{r}_A=\vec{r}_{AO}$，可以看到物理向量除使用下標外，它的順序是相反的，因為物理向量 $\vec{r}_{AO}$ 的第一個下標 A 代表被觀察者 A 點位置，而第二個下標代表參考點(即觀察者)的位置。譬如 $\vec{r}_A=\vec{r}_{AO}$ 向量在圖中表示為由橘色小人望向(觀察)A 位置的向量，而 $\vec{r}_{CA}$ 為圖中藍色小人坐在 A 位置望向 C 位置。

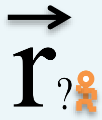

圖 4 - 3 物理向量。

物理向量的第二個下標為觀察者，如圖 4 - 3 的橘色小人在第二下標位置。雖然直覺上物理向量與向量圖示的箭頭有差異，但加法的運算方式相同，即加法運算時都是消去位於不同下標位置的同一符號(以消去下標 A 為例)：

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \text{與} \quad \vec{r}_{AO}+\vec{r}_{CA}=\vec{r}_{CA}+\vec{r}_{AO}=\vec{r}_{CO} \quad \text{相同}$$

向量性質

先前學習的一維向量空間只是一個熟悉的實數放在一條線上(實數軸)，再加上一個標示出正實數方向的單位向量 $\hat{x}$ ($\hat{i}$)，也可說向量是源自實數在空間長度上的表示，那麼實數與向量之間會有甚麼關係？

第一個與實數相關的性質是實數 0 乘上任何向量皆得到零向量 $\vec{0}$。二維空間中零向量 $\vec{0}=0\hat{i}+0\hat{j}$ 。

第二個性質是一個實數乘向量得到的向量仍存在此二維空間中。譬如一個非零向量 $\vec{A}$ 乘實數 2 為 $2\vec{A}$ ，其長度變兩倍而方向不變且存在於此二維空間中。

第三個性質是-1 乘向量得到一個大小相同但反向相反的向量。譬如向量 $\vec{A}$ 乘-1 為 $-\vec{A}$ ，且 $\vec{A}+\left(-\vec{A}\right)=\vec{0}$ 。

第四個性質是相等性質。在二維空間中如果找到一個向量 $\vec{B}$ 的大小與方向皆與 $\vec{A}$ 相同，則一定是 $\vec{B}=\vec{A}$ 。

向量有加法運算，接下來幾個性質是跟加法運算有關。

第五個性質是減法運算可用加法再加上用-1 相乘後反向的向量，即 $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$。

第六個性質是加法運算的交換律，即 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ 。

第七個是加法運算的結合律，即 $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$。

第八個是結合實數的分配律，兩向量相加後乘一實數等於向量各自乘實數後相加。如實數 a 乘兩向量 $\vec{A}+\vec{B}$ ，分配律為 $a\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=a\vec{A}+a\vec{B}$ ；除此之外兩實數相加後再乘向量也符合分配律。

向量也有乘法運算，但乘法運算後所得到的量則不在此二維向量空間裡。

有關乘法的內積運算在第七章、外積運算在第十章會再詳述。

仔細看以上向量的性質，會發現很多性質與實數的特性相同，而把向量的性質一一討論是為了後續的推廣運用，譬如找到一個非空間向量的物理量，發現這個物理量如有向量的性質，那我們可借用向量來描述這個物理量的現象。

單位向量

先前已初步了解到單位向量是長度為 1 的向量，但只提供向量的方向性並沒有長度上的差異性(都是 1)。已知一個二維空間的向量為 $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$ 其中 A_x 與 A_y 為在 x 與 y 軸上的投影量，亦即分別代表是 x 與 y 軸上的分量，它的長度為(直角三角形的斜邊長)

$$A=\left|\vec{A}\right|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

單位向量表示為

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}=\frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}\hat{i}+\frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|}\hat{j}=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\hat{i}+\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}$$

此外如果用**第 1.6 章**所提的極座標表示，也就是

$$r=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}\ ,\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$\text{且 } A_x=A\cos\theta\ ,\quad A_y=A\sin\theta$$

單位向量亦可表示為

$$\hat{A}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$

例題 4-1：三個位移向量分別為 $\Delta\vec{r}_1=1.5\hat{i}+3.0\hat{j}$，$\Delta\vec{r}_2=2.3\hat{i}+1.4\hat{j}$ 與 $\Delta\vec{r}_3=-1.3\hat{i}+1.5\hat{j}$，請分別求出長度與單位向量。

$\Delta\vec{r}_1$ 的長度為 $\sqrt{1.5^2+3^2}=3.4$

$\Delta\vec{r}_1$ 的單位向量為 $\dfrac{1.5\hat{i}+3.0\hat{j}}{3.4}=0.44\hat{i}+0.88\hat{j}$

$\Delta\vec{r}_2$ 的長度為 $\sqrt{2.3^2+1.4^2}=2.7$

$\Delta\vec{r}_2$ 的單位向量為 $\dfrac{2.3\hat{i}+1.4\hat{j}}{2.7}=0.85\hat{i}+0.52\hat{j}$

$\Delta\vec{r}_3$ 的長度為 $\sqrt{(-1.3)^2+1.5^2}=2.0$

$\Delta\vec{r}_3$ 的單位向量為 $\dfrac{-1.3\hat{i}+1.5\hat{j}}{2.0}=-0.65\hat{i}+0.75\hat{j}$

4.2 位置、速度與加速度

二維空間的位移、速度與加速度的符號表示與在一維空間完全相同，只需將 $\vec{x}$ 改為 $\vec{r}$ 。

二維空間的位移向量為

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_f-\vec{r}_i$$

將位移向量除以時間的間隔即得到平均速度為

$$\vec{v}_{avg}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_f-\vec{r}_i}{\Delta t}$$

把時間間隔縮小到 0，再利用微分的操作型定義，即得到瞬時速度為

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

再下一步，我們可經由速度來計算加速度。即速度差(末速度 - 初速度)除以時間間隔可得到平均加速度為

$$\vec{a}_{avg}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_f-\vec{v}_i}{\Delta t}$$

把時間間隔縮小到 0，同樣再藉微分的操作型定義，得到瞬時加速度為

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

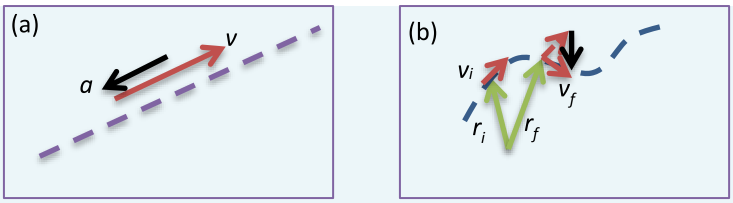

圖 4 - 4 二維運動的軌跡與速度、加速度的關係。

圖 4 - 4(a)與(b)指出二維空間中的運動與軌跡(軌跡以虛線表示)。物體的直線運動速度與加速度都跟路線平行(如(a)圖所示)，反觀(b)圖物體的曲線軌跡運動，速度仍然是軌跡的切線方向(同直線運動)，但加速度(圖中黑色箭頭)卻會出現兩種情況，一種是(a)圖的線性(切線)加速度，另一種如(b)圖物體在運動軌跡轉彎處所必須提供的轉向加速度。造成物體轉向的加速度有兩種，一種是

與速度方向不在同一直線上、固定大小與方向的加速度，譬如後面**第 4.4 章**所提的拋物運動；另一種是一直指向彎曲軌跡圓心的向心加速度，向心加速度的方向會持續改變。

二維運動的符號表示與一維運動相同，實際上該如何運算？其實就是利用在 x 與 y 軸上的分量(投影量)為互相獨立的特性，即可以分開處理。譬如瞬時速度與瞬時加速度的運算：

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$
$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dy(t)}{dt}\hat{j}$$
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt}\hat{i}+\frac{d^2y(t)}{dt}\hat{j}$$

4.3 二維等加速度運動

同一維運動中的特例－等加速度運動，其中符號與公式都相同，惟真正計算時用分量來處理。

譬如等加速度用 $\vec{a}_0$ 表示，此時的速度改變為

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}_0 t$$

實際運算時各自以向量表示，再利用 $\hat{i}$ 與 $\hat{j}$ 互相獨立的特性，可以分開處理 x 與 y 軸的分量：

$$v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}+\left(a_{0x}\hat{i}+a_{0y}\hat{j}\right)t$$
$$x\text{ 分量為: } v_x(t)=v_{0x}+a_{0x}t$$

由上式我們可以觀察到分量的公式與原本向量的公式相同。

例題 4-2：一質點在二維空間作等加速度運動，0 秒時以速度為 $\vec{v}(0)=10\hat{i}$ (公尺/秒)通過原點，如加速度為 $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}$ ，試找出該質點的速度與位移隨時間變化的函數。

積分由加速度找回速度 $$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=3\hat{i}+2\hat{j}$$

分離變數 $$d\vec{v}=\left(3\hat{i}+2\hat{j}\right)dt$$

等號兩邊各自積分 $$\int_{10\hat{i}+0\hat{j}}^{\vec{v}(t)}d\vec{v}=\int_0^t\left(3\hat{i}+2\hat{j}\right)dt$$

積分結果 $$\vec{v}(t)=\left(10\hat{i}+0\hat{j}\right)+\left(3t\hat{i}+2t\hat{j}\right)$$

整理後速度為 $$\vec{v}(t)=(3t+10)\hat{i}+2t\hat{j}$$

再積分由速度找位移	$\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}=(3t+10)\hat{i}+2t\hat{j}$
分離變數	$d\vec{x}=((3t+10)\hat{i}+2t\hat{j})dt$
等號兩邊各自積分	$\int_{\vec{0}}^{\vec{x}(t)}d\vec{x}=\int_0^t((3t+10)\hat{i}+2t\hat{j})dt$
積分後整理為	$\vec{x}(t)=\left(\dfrac{3}{2}t^2+10t\right)\hat{i}+t^2\hat{j}$

4.4 拋物運動

在二維或三維運動中的等加速度運動，最好的例子即是拋物運動。首先把 x 軸定義在水平面方向上，而 y 軸定義在垂直水平面的方向上，正好重力加速度 g 是垂直水平面(鉛直方向)指向下方，可以把 x 與 y 兩個方向的運動分開計算。其中在水平方向上沒有加速度，物體以等速度運動在運行；而在鉛直方向上，物體作等加速度運動。

假設一質點以初速度 $\vec{v}_0=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}$ 由原點拋出，此時重力加速度為 $\vec{g}=-g\hat{j}$。拋出後物體的速度隨時間關係，在 x 軸方向為等速度運動，水平速度隨時間變化為

$$v_x(t)=v_{0x}$$

而 y 軸方向受重力加速影響，速度逐漸減少並轉變為鉛直向下運動，鉛直速度隨時間變化為

$$v_y(t)=v_{0y}-gt$$

從鉛直方向的速度，可以研判此質點達到最高點所需要的時間為

$$t=\frac{v_{0y}}{g}$$

接下來再考慮與位移關係，在 x 軸方向等速度運動，位移與時間呈現線性函數關係

$$x(t)=v_{0x}t \tag{4.4-1}$$

在 y 軸方向則是等加速度運動，為拋物線函數關係

$$y(t)=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{4.4-2}$$

在二維向量空間中繪出質點軌跡可直接計算出 $y(x)$ 的函數，把 **4.4-1 式**的時間

t 換成 x/v_{0x} 帶入 4.4-2 式，可找到軌跡函數

$$y(x)=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x-\frac{gx^2}{2v_{0x}^2}$$

質點拋出時初速度與水平面間出現一個角度(設為 θ)，因此初速度的水平與鉛直分量，亦可用初速度大小 $v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}$ 與角度 θ 來表示，則初速度的兩個方向分量與軌跡函數可以改寫為

$$v_{0x}=v_0\cos\theta,\ \ v_{0y}=v_0\sin\theta$$

$$y(x)=(\tan\theta)x-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{4.4-3}$$

我們利用 4.4-3 式繪製拋物運動的軌跡，並可以調整物體拋出時初速度與仰角的大小，來觀察拋物體投射的距離。

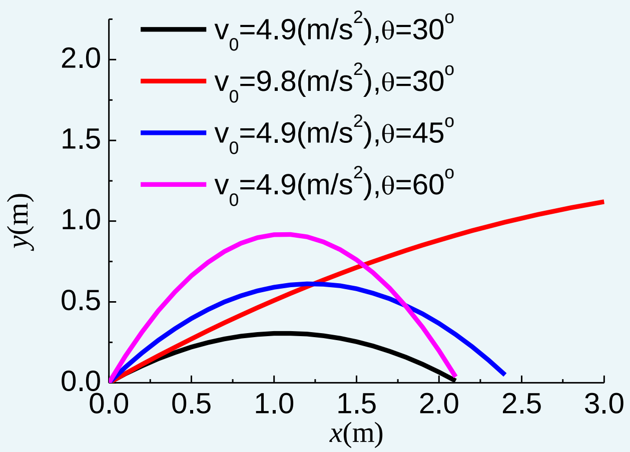

圖 4 - 5 不同初速度與仰角下拋物運動的軌跡。

觀察圖 4 - 5 拋物體的軌跡(以紅色與黑色軌跡為例)，可以看到將初速度放大兩倍，物體的拋射距離放大到四倍。當初速度相同時(以藍色與黑色軌跡為例)，拋射角度呈 45° 時拋射距離較遠；且拋射仰角 θ 與 $90^o-\theta$ (以紫色與黑色軌跡為例)時造成的高度不同，但拋射距離卻相同。

有關拋射物體的高度與距離可用質點達最高點所需的時間計算，我們先假設物體拋出時速度的鉛直分量為 v_{0y}，在到達最高點時被加速度 g 消耗殆盡，因此達最高點的時間為 v_{0y}/g。物體拋出後上升達最高點與自最高點降落到地面的軌跡相對稱，且同一高度時鉛直方向的速度大小相同、方向相反。因此，

拋射高度的計算可由最高點至降落地面這一段的運動求得：

$$\text{拋射高度}\quad H=\frac{1}{2}gt^2=\frac{g}{2}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

要計算拋物體水平最大距離，因整個過程包含上升段與下降段兩段時間 $2v_{0y}/g$，水平方向以等速度(v_{0x})運動，所以拋射的水平距離為：

$$\text{拋射水平距離}\quad R=v_{0x}\frac{2v_{0y}}{g}=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

從上式拋射水平距離的計算結果，觀察到初速度相等時，當仰角呈 45° 時拋射距離最遠。

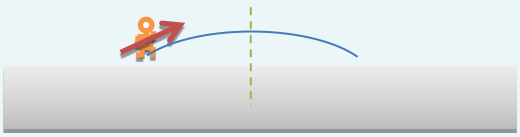

圖 4-6 選手跳遠如拋物運動之示意圖。

例題 4-3：一位跳遠選手以仰角 18° 速度 10(公尺/秒)跳離地面，試估計他此次跳遠比賽的距離。

選手跳起之速度分量 $10\cos(18^o)\hat{i}+10\sin(18^o)\hat{j}=9.5\hat{i}+3.1\hat{j}$ (m/s)

上升到最高點時間為 $\frac{v_{0y}}{g}=\frac{3.1}{9.8}=0.32$ (s)

整個跳遠過程花費兩倍時間 0.32×2=0.64 (s)

跳遠距離為水平方向等速度運動 $9.5\times0.64=6.1$ (m)

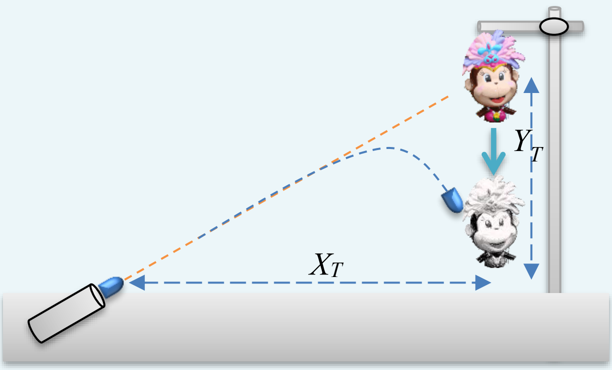

圖 4-7 打猴子實驗示意圖。

例題 4-4：拋物運動中最有名的例子是打猴子實驗，類似憤怒鳥的遊戲。如圖 4-7 所示猴子在高

度 Y_T 處作自由落體運動，投射物與猴子間水平距離為 X_T，假設猴子掉下的那一瞬間發射拋物體，試驗證當物體瞄準猴子拋出時會擊中目標。

當拋物體瞄準猴子發射，仰角為 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Y_T}{X_T}\right)$

如初速度大小為 v_0，則水平方向速度分量 $v_0 \cos\theta$

鉛直方向速度分量為 $v_0 \sin\theta$

要擊中目標，最低條件為速度夠快使得拋物體水平投射距離大於 X_T，即符合

$$\frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} > X_T \rightarrow \frac{2v_0^2 X_T Y_T}{g\left(X_T^2 + Y_T^2\right)} > X_T$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{g\left(X_T^2 + Y_T^2\right)}{2Y_T}}$$

當速度大小夠快時，拋物體水平方向走 X_T 的距離所需時間為

$$t_T = \frac{X_T}{v_0 \cos\theta}$$

拋物體能擊中目標的條件為：猴子掉下來的高度與拋物體上升的高度和恰為總高度 Y_T

高度和為 $\left(\dfrac{1}{2}gt_T^2\right) + \left(v_0 \sin\theta t_T - \dfrac{1}{2}gt_T^2\right)$

可整理為 $v_0 \sin\theta t_T = v_0 \sin\theta \dfrac{X_T}{v_0 \cos\theta} = X_T \tan\theta$

再把一開始的仰角 $\tan\theta = \dfrac{Y_T}{X_T}$ 帶入得到高度和為 $X_T \dfrac{Y_T}{X_T} = Y_T$，剛好是小猴子原來的高度，故確認瞄準猴子後拋射物體能擊中猴子。

4.5 圓周運動

第 4.2 章中提到運動速度的增減可由軌跡之切線方向加速度決定，而在曲線運動中速度方向的改變則是由轉向加速度所造成，轉向加速度可以是與速度方向不在同一直線上，但固定大小與方向的等加速度(如第 4.4 章所講的拋物運動)，或是製造圓弧運動軌跡的向心加速度(加速度方向均指向軌跡曲線近似於圓弧的圓心位置)。等速率圓周運動為最典型的向心加速度運動的特例，在此運動下速度大小不變，即切線加速度為 0，且向心加速度的大小與速率及半徑有關。以下我們用兩種推導方式，找出圓周運動的向心加速度。

幾何方式推導向心加速度

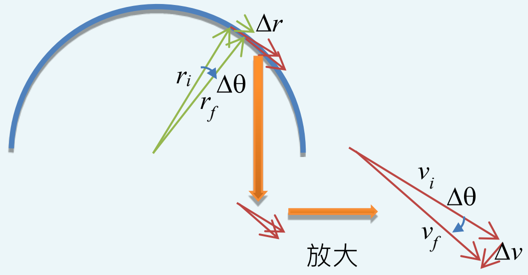

圖 4 - 8 幾何方式找轉向的加速度。

如圖 4 - 8 所示，物體以順時針方向作等速率圓周運動。假設在某兩個時間點(時間間隔 Δt)分別測量到物體起點位置向量 $\vec{r}_i$ 與終點位置向量 $\vec{r}_f$ (如圖綠色箭頭所示)，則該物體的位移 $\Delta\vec{r}$ 與起點、終點位置向量等三個向量圍成一個等腰三角形(如圖綠色箭頭所圍之三角形所示)，且起點與終點位移向量之間夾一角度 $\Delta\theta$ 。

起點的速度向量(注意速度方向為該位置的軌跡切線方向)與終點的速度向量之變化量為何？把兩個速度向量的起點放在同一個位置，即能計算出速度向量的變化量，如圖中右下角的紅色箭頭(我們將之放大方便讀者觀察)，此時起點速度、終點速度與速度差 $\Delta\vec{v}$ 三個向量圍成另一個等腰三角形(如圖放大的紅色箭頭所圍之三角形所示)。因為位置向量與速度向量之間互相垂直(圓的半徑所指的方向與切線的方向互相垂直)，所以起點與終點速度向量的夾角與位移向量的夾角同樣都是 $\Delta\theta$。分別仔細觀察綠色箭頭與紅色箭頭所圍成的三角形，不難發現這兩個三角形為相似三角形。

再來可以利用這兩個相似三角形，計算出等速率圓周運動中，速度轉向所需要的轉向加速度。平均加速度為速度變化量除以時間間隔，其大小表示為

$$a_{avg} = \left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta t|}$$

利用前面所提到兩個相似三角形，由其三角形邊長比例關係：

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

可以把平均加速度改寫為與位移相關：

$$a_{avg}=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}\frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta t|}=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$

再把時間間隔縮小到零，即可導出瞬時加速度為：

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{r}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\frac{v^2}{r}$$

當時間間隔縮小時，位置向量所圍成三角形與速度向量所圍成的三角形之間，還是維持相似三角形的關係。

向量方式推導向心加速度

除了用幾何方法推導向心加速度外，我們也可以把位置向量用極座標表示，在固定半徑長度下的位移即為圓周運動，用微分的計算方式可導出速度與加速度。藉由此方式所推導出的速度與加速度，可獲得大小與方向等兩項資訊。

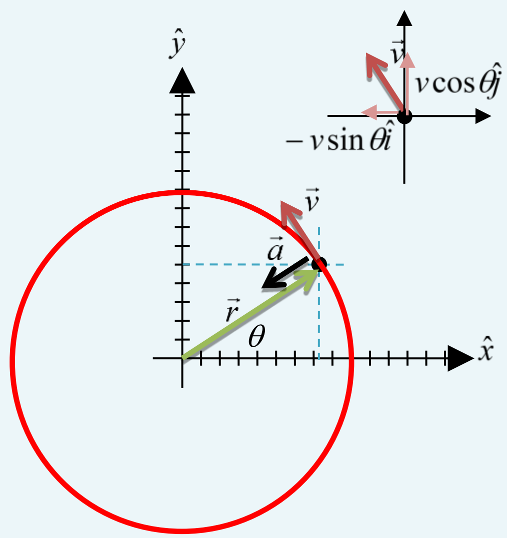

圖 4 - 9 在直角座標下，標示圓周運動與極座標間的關係。

注意圖 4 - 8 中的圓周運動為順時針方向，與圖 4 - 9 的逆時針運動方向相反，一般用向量與極座標表示圓周運動時，皆以逆時針方向運動。因為座標的定義是使用右手定則，當眼睛直視你的右手拇指時，其餘四隻手指所指的方向為逆時針方向，即表示自 $\hat{x}$ 轉動到 $\hat{y}$ 的方向為正的 90 度，反之自 $\hat{y}$ 轉動到 $\hat{x}$ 的方向為負的 90 度。

當利用座標表示物體位置向量時，可以使用笛卡兒座標與極座標兩種方式，假設物體位移被限制在半徑 R 的圓上，此時位移向量用水平與垂直方向分量

可表示為：

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}=R\cos\theta\hat{i}+R\sin\theta\hat{j}$$

圓周運動時位置在極座標上的角度 θ 隨時間變化，成等角速度的變化，也可以用角速度 ω 與時間 t 表示為 $\theta=\omega t$ (初始角度為 0)。圓周運動物體的速度，可用位置向量對時間微分可得到：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{d}{dt}\right)\vec{r}=\left(\frac{d}{dt}\right)R\cos\theta\hat{i}+\left(\frac{d}{dt}\right)R\sin\theta\hat{j}$$

這裡把〝對時間微分〞當成一種數學的運算，像使用分配律公式一樣，可以分別作用在水平與垂直兩個方向的運動分量，因為圓的半徑不隨間變化，所以速度向量微分後可得到

$$\vec{v}=R\frac{d(\cos\theta)}{dt}\hat{i}+R\frac{d(\sin\theta)}{dt}\hat{j}=R(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{i}+R\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

計算過程中我們會使用到連鎖律， $\cos\theta$ 對時間的微分，即等於它先對 θ 微分再乘上 θ 對時間微分。把角度對時間微分換成角速度，得到最後的速度向量

$$\vec{v}=\omega R\left(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}\right) \qquad (4.5\text{-}1)$$

仔細看 4.5-1 式所指的方向，正是圖 4 - 9 所標示的紅色箭頭的方向，同樣也是運動軌跡的切線方向。從另一角度來看，這個速度方向恰巧是極座標的角度單位向量 $\hat{\theta}$ 所指的方向。極座標的單位向量一直隨位置不同而改變，極座標的半徑單位向量與角度單位向量分別為：

$$\hat{r}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}\,,\quad \hat{\theta}=-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}$$

未來還會學三維空間的球座標系統，此時當角度成為變數時，它的單位向量指向何方呢？藉此機會我們從極座標角度的單位向量來了解，圖 4 - 9 顯示出角度(速度)方向正是瞬間角度增加時的切線方向，當以角度增加為方向的定義方式，亦可找到其它以角度為變數的單位向量。

推導出速度後，接著再把速度對時間微分可計算加速度。4.5-1 式對時間微分後為：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\omega R\left(-\frac{d(\sin\theta)}{dt}\hat{i}+\frac{d(\cos\theta)}{dt}\hat{j}\right)$$

微分計算後得到

$$\vec{a}=\omega R\left(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i}-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}=-\omega^2R\left(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}\right)$$

上式結果顯示加速度的方向與位置向量恰好相反，所以加速度的方向意味著下

個時間點的速度方向與現在的速度方向必不同，必須要藉由向心加速度把現在這個時間點的速度方向轉向，才能指向下個時間點的速度方向，而轉向的方向正是向心加速度的方向。向心加速度大小為 $R\omega^2$ ，從前面得知速度與角速度間的關係為 $v=\omega R$ ，向心加速度大小亦可表示為 v^2/R ，此結果與使用幾何方式推導出之向心加速度大小相同。

切線加速度與向心加速度

如第 4.2 章圖 4-4 所示，物體運動的速度方向為軌跡的切線方向。物體作直線運動的加速度(稱為*切線加速度*)是沿著運動方向且可改變速度的大小，但當物體作曲線運動時，除了有切線加速度(沿著軌跡切線方向)外，我們還須考慮造成圓弧軌跡運動的加速度，稱為*向心加速度*。首先將軌跡曲線比作圓弧，由圓弧即能找到位於中心點的圓心位置，而向心加速度的方向總是指向此圓弧的圓心位置。

切線加速度的符號為 a_t ，向心加速度的符號為 a_r ，且兩個加速度互相垂直，因此總加速度為切線與向心加速度兩分量所組成的向量長度，寫成 $a=\sqrt{a_t^2+a_r^2}$ 。

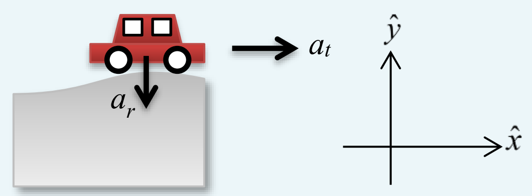

圖 4-10 汽車加速開過坡頂。

例題 4-5：一輛汽車在洛杉磯高低起伏的道路上開車，為了上坡猛踩油門，汽車爬上坡頂時加速度增加為 0.5(公尺/秒 ²)且速度為 4(公尺/秒)，已知小山坡的曲度等於半徑 600 公尺的圓弧，請計算汽車的總加速度與方向。

汽車水平加速度為 $a_t=0.5$ (m/s²)

向心加速度為(方向鉛直向下) $a_r=\dfrac{4^2}{100}=0.16$ (m/s²)

總加速度為(如圖 4-10 所定義之 x 及 y 軸方向) $0.5\hat{i}-0.16\hat{j}$ (m/s²)

總加速度大小 $\sqrt{0.5^2+0.16^2}\cong 0.52$ (m/s²)

4.6 相對速度

兩個以上的座標同時觀察一個物體的運動，如這兩個座標之間有相對運動，則在不同座標下所觀察到物體的位移、速度與加速度可能不相同。我們已知其中一個座標所觀察到物體的位移、速度與加速度，能否推算出另一個座標所觀察到物體的位移、速度與加速度？相對速度是在討論不同座標〝轉換〞下，觀察到的物理量應該如何改變，當兩座標相對運動的速度遠小於光速時，應遵守古典伽利略(Galilean)座標轉換的計算，如相對速度接近光速則遵守羅倫茲(Lorentz)座標轉換的計算(愛因斯坦的狹義相對論)。兩座標間相對運動，在狹義相對論裡僅討論兩座標間等速度相對運動問題，另兩座標間加速度相對運動會產生非慣性座標系統的問題，則不在此討論範圍。

日常生活中其實有許多相對運動的應用，譬如在遊樂場裡有立體動態電影，一方面讓觀眾在視覺上感受到三維空間的震憾效果，另一方面業者操控電影院裡的座椅，並配合電影情節使座椅運動，讓觀眾直接感受到速度及加速度而有身歷其境的感覺。實際上電影院裡的座椅並非真的載著觀眾離開電影院到實地轉一圈回來，只是配合電影情節的節奏感、速度感與方向感在原地上下、前後與左右運動，這種動態電影的製作表演方式，其實就是相對運動的概念。

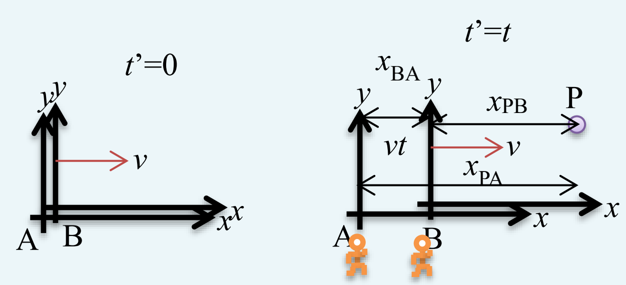

圖 4 - 11 兩座標系統等速度相對運動。

為了簡化相對運動問題，我們把兩座標系統相對運動速度的方向定為 x 軸，而且一次只處理一個方向的相對運動。圖 4 - 11 表示 B 座標相對於 A 座標往 $\hat{i}$ 方向等速度 $v\hat{i}$ 作運動，在時間為零秒時，兩座標完全重疊在一起，當時間為 t 秒後，B 座標系統向 $\hat{i}$ 方向移動了 vt 的距離。在這裡我們稱 A 座標系統或是 B 座標系統，都只是把 A 或 B 點放在某一個座標的原點上來觀察物體。

前面我們提到相對運動一次只處理單個方向問題，所以現在有關 $\hat{i}$ 方向的相對運動，只需考慮該方向的位移、速度與加速度等問題。從圖 4 - 11 的右圖

中看出 B 座標觀察 P 物體在 $\hat{i}$ 方向分量為 x_{PB} ，而在 A 座標觀察則為 x_{PA} ，兩座標之 $\hat{i}$ 方向分量不同，主要原因是 B 座標已經離開 A 座標一段距離，因此在 A 座標會(原點)觀察到 B 座標(原點)移動到 $x_{BA} = vt$ ，為了減少計算相對運動問題時，因繪製座標系統而造成誤置，所以可以利用下標的符號來協助我們表示其座標的轉換，計算如下：

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA} \tag{4.6-1}$$

大家是否觀察到等號右邊不同位置的相同下標 B，同時消去 B 後會得到等號左邊的結果？在第 **4.1 章**講述物理向量時有提到此觀念。

下一步分析相對速度，各位同學當然可以由**圖 4 - 11** 的右圖分析，即在 B 座標看 P 物體速度再加上在 A 座標看 B 原點速度，最後得到的是 A 座標看 P 物體速度，即是

$$v_{PA} = v_{PB} + v$$

這種作法在同學幾何觀念很正確時，可以很容易獲得解決，但是當幾何上無法繪出相對運動時，這時就需要符號運算這個小幫手了。因為速度是位置對時間的微分運算，我們可以從 **4.6-1 式**推導相對速度如下：

$$\left(\frac{d}{dt}\right)x_{PA} = \left(\frac{d}{dt}\right)(x_{PB} + x_{BA})$$

這裡〝對時間微分〞被當作一種運算子(operator)，就像是數字的加、減、乘、除運算一樣，且這個微分計算包含分配律。微分後會得到

$$\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{PB}}{dt} + \frac{dx_{BA}}{dt}$$

剛好座標間的相對速度為 v，因此整理為

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} = v_{PB} + v \tag{4.6-2}$$

建議同學保留住此式的下標以利後續的計算與推導。依此類推，可以再把對時間微分的運算子(operator)運用於 **4.6-2 式**上，可得到

$$\frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{PB}}{dt} + \frac{dv_{BA}}{dt}$$

$$a_{PA} = a_{PB} + a_{BA} \tag{4.6-3}$$

剛好兩座標為等速度相對運動，所以 $a_{BA} = 0$ 則 $a_{PA} = a_{PB}$ 。

例題 4-6：有三輛車(A, B 與 C 車)行駛在高速路上，其中 A 車看到 B 車的速度是-20(公里/時)，C 車看到 B 車的速度是 15(公里/時)，如果 A 車的速度是 60(公里/時)，那 C 車的車速是多少？

處理相對速度運動問題時，可以利用繪圖或是以物理向量符號運算兩種方法，惟使用繪圖方法需有正確的幾何觀念，一般我們以物理向量來解相對運動問題顯得較容易。

A 車看 B 車速度-20 表示 $v_{BA} = -20$ (km/h)

C 車看 B 車速度 15 表示 $v_{BC} = 15$ (km/h)

從下標運算可得 A 車看 C 車 $v_{CA} = v_{CB} + v_{BA} = -v_{BC} + v_{BA}$

將數字帶入可得 $v_{CA} = -15 - 20 = -35$ (km/h)

A 車速度是 60 表示在靜止座標 O 看 A 車 $v_{AO} = 60$ (km/h)

所以靜止座標測得 C 車速為 $v_{CO} = v_{CA} + v_{AO} = -35 + 60 = 25$ (km/h)

例題 4-7：二十世紀初科學家相信乙太是光傳遞的媒介，並認為乙太如空氣般被地心引力吸引，隨著地球自西向東轉。假設在赤道測量光對地球的速度，已知光速 C 為 3×10^{8}(公尺/秒)，乙太風速度的大小為正東方 0.1C，最後光對地球的速度方向指向正北方，問所測量到的光速大小？

乙太風吹向正東方 0.1C 表示為 $v_{WG} = 0.1c\hat{i}$

最後光速為正北方 $v_{LG} = v\hat{j}$

光相對乙太速度為 $v_{LW} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j}$ 且 $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$

光對地球與光對乙太關係為 $v_{LG} = v_{LW} + v_{WG}$

用向量分量表示為 $v\hat{j} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + 0.1c\hat{i}$

從等式中計算光相對乙太速度的東西向分量為 $c_x + 0.1c = 0$ 則 $c_x = -0.1c$ (m/s)

再計算光相對乙太速度的南北向分量 $c_y = \sqrt{c^2 - (0.1c)^2} = 0.99c$ (m/s)

光對乙太速度的向量表示為 $v_{LW} = -0.1c\hat{i} + 0.99c\hat{j}$

可知光對乙太風速度方向為北偏西

再帶回光與乙太風相對速度關係式，可得光對地球的速度 $v = 0.99c$ (m/s)

習題