

## 第五章 動力學與牛頓力學(Dynamics and Newtonian Mechanics)

在第三章與第四章描述物體運動的現象稱“運動學”，是觀察與紀錄物體的位置隨時間變化，並進一步分析出速度隨時間變化進而找出物體的加速度，這藉由觀察、紀錄與分析數據來探索物理屬於物理的“現象學”。在觀察完物理現象後，我們會問為何會產生這樣的現象？有沒有操控此物理現象的機制？此外對於第三章與第四章的內容，我們還有疑問：為何運動學中只提到物體的加速度，而沒有再進一步討論加速度對時間變化的運動情形？為何不討論加速度對時間微分的問題？為何現實世界的確很少遇到加速度隨時間變化的運動現象？物體在甚麼條件下作等速度運動？甚麼條件下作等加速度運動？

本章討論運動學背後的物理機制(mechanism)，即探索運動行為改變的原因(經由外力來改變運動狀態)，因此也稱為動力學。牛頓力學或說是牛頓運動機制(Newtonian Mechanics)即是探討物體運動動力學的理論，從物體受力產生加速度來預測運動。此外，探討運動學機制的還有古典力學中的哈密頓力學或說是哈密頓運動機制(Hamiltonian Mechanics)，是從能量最低、時間最短、路徑最短等數學的變分計算推導出來。本章經由牛頓力學探討運動現象學的背後機制，除了介紹牛頓定律外，主要是和同學一起探討計算高中課程的熟悉應用例題，接下來第六章所介紹的內容比高中課程艱深許多，將討論有關牛頓力學的進階應用，由力等式結合微分與積分運算，從而找到物體的位置與速度隨時間變化的函數。

### 5.1 牛頓第一運動定律

我們生活的世界剛好在鉛直與水平方向上有個很不對稱的運動現象，其中在鉛直方向上有等加速度運動，在前面第 3.6 章還特地討論鉛直上下的自由落體運動。而水平方向與鉛直方向完全不同，我們在第 4.4 章討論拋物運動時就發現到水平方向是等速度運動，例如在日正當中時，觀察籃球或排球丟出後地面上球影隨時間的變化情形，假如能每 0.5 秒拍下在地上的球影位置，我們會發現到每 0.5 秒影子移動的距離一樣且形成一直線，此即為地球上水平方向等速度運動的特性。

水平方向是指沿著水面的方向，像水一樣的液體在重力的作用下，其中最

上層的部分會受重力影響調整成相同(對地心)的高度，即相同的“重力位能”，如有部分最外層液體高度(或重力位能)較高，則會由高向低擠壓使得所有最上層液體的能量相同。能因擠壓而產生形變是一般常見液體的特性，固體則能夠支撐重力位能，所以不需調整成水平面；此外液體向下擠壓的力量，會轉換到水平方向與其它部分的液體間相互擠壓，最後會調整到液體的每層高度相互擠壓力量達到相同狀態，進而形成動態平衡。在此高度相同的水平面上運動不會受鉛直方向的重力影響，因此形成與鉛直方向不同的等速度運動。

水面上被風吹拂激起漣漪，漣漪的波紋連續往外擴大，且波紋與波紋間的距離相同。籃球被選手拋出去後，在水平方向呈現等速度運動。棒球被球棒擊中後，水平方向也是等速度運動。撞球檯上的球被球桿打出去後，以每 0.2 秒拍連續相片來記錄，也會看到照片上的球與球之間距離相同，且呈現一直線方向的等速度運動。這些等速度運動的物體，在開始運動的一瞬間因受到擾動，譬如風吹拂水面、選手用力拋出籃球、球棒打擊到棒球，球桿擊中母球...等，而這樣的擾動並沒有持續，也就是在那一瞬間受力後，在物體運動過程中並沒有持續再受外力的影響，因此物體在水平方向不受力下而呈現等速度運動。如果水面上的風持續不斷的吹拂，那水面上的波紋距離就會產生差異，如果球在運動過程中持續被打擊，除了球的運動方向可能會改變外，運動中的速度大小也會發生變化。

如果物體一開始的瞬間沒有受力呢？那水面上不會有波紋出現，籃球與棒球會掉在地上，且由正上方的太陽往下看，籃球與棒球的影子位置沒有產生變化。撞球檯在借助水平儀調整完水平面後(水平儀是利用液體呈現水平面的特性)，球會停在撞球桌上等著球桿來撞擊，當然在沒有水平的桌面上，球還是會往較低處滾去。如果沒有受到擾動，我們生活空間中所有物體在水平方向都會靜止不動。相反地，鉛直方向的物體運動是持續受到重力影響干擾，而呈現等加速度運動行為。

牛頓第一運動定律即是描述沒有受到持續擾動時物體的運動。

## 牛頓第一運動定律

*物體在不受任何外力之下，靜者恆靜，動者恆作等速度運動。*

這裡的不受外力之運動是指撞球被擊中後的水平面上的運動，並沒有考慮被撞擊那一瞬間受力的運動行為（因屬牛頓第二運動定律範圍）。

在了解水平面上不受外力情形下，普遍的運動狀態為靜止不動或等速度運動後，接著我們還要來探討乘坐交通工具時物體運動問題。在飛機、輪船與火車等交通工具日新月益的現代，我們常有乘坐這些交通工具的經驗。在長距離的運輸狀況下，我們會遇到乘坐在固定速度的交通工具上，而乘坐的交通工具就像是新座標，且這個新座標相對於地面(地球上靜止座標)作等速度運動。在

交通工具開始發展時期，科學家陸續在這些新座標上(交通工具)測試物理定律，像是現在在太空中進行實驗一樣，科學家發現這個座標上的物理現象，還是遵守牛頓的第一運動定律。在等速運動的交通工具且水平桌面上，原本靜止的撞球還是靜止，當球桿在瞬間撞擊球後，撞球在後續不受力情況下仍遵行等速度運動行為。在這裡我們暫不討論交通工具剛起步、停止前一小段加速度期間的運動情形，也不考慮路面是否平坦、軌道顛簸與彎曲等特殊狀況，因在前述這些特殊情況下，物體在交通工具上的運動行為並不遵守牛頓第一運動定律，如應該靜止的球會突然動起來，因為加速度或是路面顛簸造成。

從交通工具上實驗的經驗，我們發現在有些座標上牛頓第一運動定律並不適用，而在水平方向的運動，地球上及等速度運動交通工具上的座標系統，都符合牛頓第一運動定律，我們把這樣的座標系統稱為慣性座標。

## 慣性座標(inertia frame)

所謂慣性座標有以下三個特性：

1. 在慣性座標下物體運動遵守牛頓第一運動定律。
2. 以等速度相對於慣性座標運動的其它座標也是慣性座標。
3. 物體不受力情況下，任何觀察到該物體加速度為零的座標系統都是慣性座標。

了解慣性座標的特性後，回頭看交通工具在加速期間，物體在該交通工具的座標系統中，即是非慣性座標。此外，仔細觀察地表水平面上的座標系統，也不是真的慣性座標，因為在沒有任何外力下仍然有加速度存在，這個加速度的假想外力稱為柯氏力(Coriolis force)，其形成原因是因為地球自轉，在地球這個球座標系統上所感受到的加速度。

## 5.2 力與向量

在日常生活中，我們發現到要施力才能改變物體的運動狀態。譬如原本籃球是停在我們的手上，我們要用 force 才能把球拋出，而且距離籃框越遠，還發現需要施予更大的力氣才能把籃球拋到籃框位置。

### 力的形式與大小

為了改變物體在水平方向的運動狀態，我們在極短的初始時間施予物體一個力量，讓物體改變運動速度或方向。譬如打乒乓球，發球時我們用力揮球拍，在接觸球那一瞬間改變球的水平方向運動狀態並同時增加速度，但乒乓球在離開球拍後，即在水平方向作等速度運動。除了開球時用力，我們也發現到接球反擊時，越用力揮球拍擊出的球速越快，並且可以用球拍控制球擊出的方向。

用球棒打棒球時，棒球也會改變原本的方向，順著揮棒的方向飛出去，而且打擊者亦可控制力量大小造成短打或是全壘打。

除了瞬間施力擊出物體的經驗外，我們還觀察到在拖行李時要施力、讓腳踏車保持水平方向等速度運動時要施力、讓汽車等速度行駛時要踩油門讓引擎施力。我們在有些情況下為了要維持水平方向的等速度運動，必須要持續施力，這樣的問題，在裝有輪子的物體或工具有減小所需持續施力的趨勢，甚至在部份可浮起來的物體，譬如磁浮列車或是拋物體，幾乎不需要持續施力亦可以維持等速度運動。我們生活的世界存在許多阻礙運動的力，所以要持續提供作用力來維持等速度運動，在物體與物體間接觸時有“摩擦力”阻礙運動，運動時空氣撞擊物體也有空氣阻力。

前面提到在地表上鉛直方向運動與水平方向有極大的差異性，譬如我們在鉛直方向把物體從低處鉛直向上提到高點，我們需要持續施力，途中只要有瞬間不施力，物體就會以等加速度掉回原處。這種鉛直方向持續施力的經驗，讓我們想到物體一直持續受到一個鉛直向下的拉力，我們稱為重力，是一種物體與地球之間吸引的力量。

從巨觀上觀察，球被拋出或打擊需要巨觀上的接觸，被視為“巨觀上接觸力”，物體接觸在水平方向需克服的摩擦力及空氣阻力亦可歸納為巨觀上接觸力，但從鉛直方向來看，如果沒有以桌子或是徒手提供向上的力量擋住物體，物體在沒有其它力量接觸下還是會以等加速度運動自由落下，我們知道物體持續受非接觸的重力才能加速度往下運動，所以重力屬於“非接觸力”或是“超距力”。

## 力的方向與向量關係

在體認到力以不同的形式存在，也以不同的大小來改變物體運動狀態之後，下一步要能找到力可以利用甚麼數學工具來表示呢？

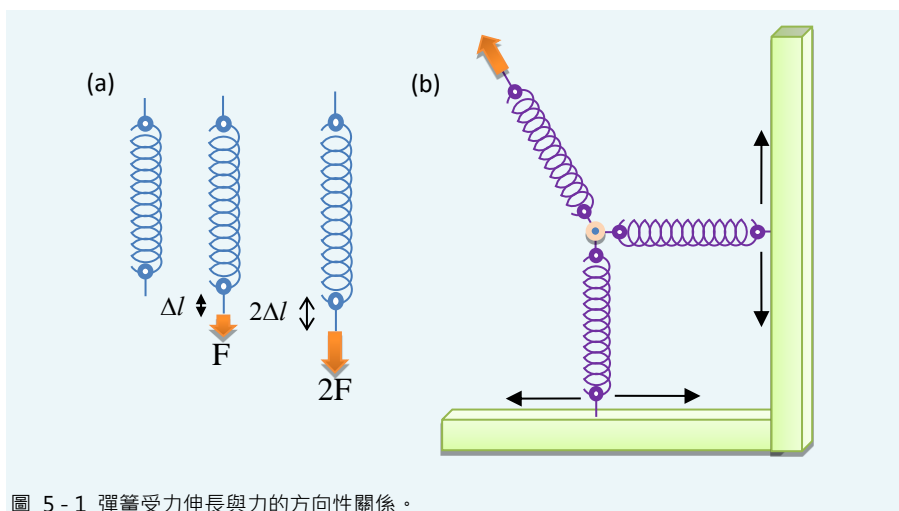


圖 5 - 1 彈簧受力伸長與力的方向性關係。

彈簧是一種能表現力特性的好工具，我們觀察到彈簧的伸長量(拉伸後的長度減掉原長)與拉力呈現線性關係，即用一倍的力量即伸長一單位長度、用兩倍力量會造成伸長兩單位的長度，如圖 5 - 1(a)所示。反過來應用彈簧，我們可以從彈簧伸長量來計算出力的大小。

我們利用彈簧製作出分力板(如圖 5 - 1(b))，分力板有一水平方向彈簧，可以自由在板的上下方移動，使得彈簧與右邊架保持垂直狀態，稱為水平分力彈簧；另有垂直方向的彈簧，可自由在板的左右方移動，使得彈簧與下邊架保持垂直狀態，稱為垂直分力彈簧，且水平與垂直分力彈簧繫在同一個環上。在此環上還有一條可以任意調整方向(從正上方改變到正左方)與大小的彈簧，此彈簧模擬力的方向與大小稱為合力彈簧。當合力彈簧往左上方拉伸長量 5 公分與垂直向上的方向夾角為 30 度角時，再調整水平分力彈簧與右邊架垂直、垂直分力彈簧與下邊架垂直後，我們觀察到水平分力彈簧伸長量 2.5 公分，且垂直分力彈簧伸長量 4.3 公分，其伸長量正比於力的大小。從分力板的實驗中，我們發現任意方向的力，皆可以分解成水平分量的力與垂直分量的力，這樣的結果與第四章所講的向量性質一樣，因此我們用數學工具向量來表示力，並藉由向量工具來處理有關力的運算。

## 5.3 牛頓第二運動定律

同學現已建立好以向量表達作用力的概念後，接著我們要處理物體受外力影響改變運動狀態的問題。前面提過物體在沒有桌面支撐下，會鉛直向下呈現自由落體的等加速度運動，此外，不論物體的重量是否更大或更小，我們觀察

到的自由落體運動都相同。當物體自由落體加速度相同，但是作用力大小是否相同呢？我們可以用彈簧施予物體向上的力來阻止物體自由落體運動，此時阻止物體落下的力量等同於造成物體加速度運動的力量(重力)，觀察到越重的物體所需施予的力量越大，表示質量越大的物體其所需重力越大，才能造成相同狀態的加速度運動行為。

回到水平方向運動情形，我們用球桿瞬間撞擊撞球後，撞球在水平面作等速度運動，但是如果把同樣材質的撞球體積變大兩倍，用相同的力撞擊時，我們發現體積(質量)大兩倍的撞球，速度約縮減一半。在球桿撞擊球的那一瞬間我們才對球施力，造成球體呈加速度狀態，當加速到一個固定速度後離開球桿作水平方向等速度運動。如果球受力時間相同則最後速度大小與球的加速度有關。這裡我們觀察到在相同大小的作用力下，球體質量越重則運動的加速度越小。

一般日常生活中使用的汽車，在廣告中會告訴消費者車輛多重？引擎能提供多少匹馬力？車子由 0 加速到 100(公里/秒)需要多少秒等。假如不考慮齒輪變速箱的問題，馬力都是 150 匹馬力的二台車，一輛 1000 公斤重的 A 汽車與另一輛 2000 公斤重的 B 汽車，我們觀察到 A 汽車加速到 100(公里/秒)只需 7 秒，而 B 汽車卻需要 14 秒。這裡也告訴我們馬力相同時候，重量越重的車加速度越小，所以加速到相同時速所需的時間越長。

從上面的幾個例子，我們歸納出相同作用力下，質量與加速度呈現反比的關係。此外在使用外力改變物體的運動時，相同作用力下質量越大則越難改變運動狀態，即越難增加物體速度。

## 質量

從外力與速度改變的觀點出發，質量越大越難增加或減少物體的速度，因此質量可視為慣量，稱為慣性質量(inertia mass)。物體的慣性質量為其本質特性，無法從其周遭環境與測量方法去改變它。

質量與重量不同，重量是物體受地球吸引的力量，如果地球的質量發生變化，僅物體的重量會改變，但是質量不變。

## 牛頓第二運動定律

牛頓的第二運動定律在描述物體受外力作用下的運動行為。**物體受一合力大小  $F_{net}$  (力以向量表示) 作用下，它的加速度  $\vec{a}$  與合力(net force) 成正比，與它本身質量  $m$  成反比**，可以用符號記為

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$$

藉由加速度與質量的單位，我們找到力的單位為：公斤×公尺/秒<sup>2</sup>，並稱為牛頓(縮寫符號用 N)。從牛頓第二運動定律，我們了解物體在外力作用下，用慣

性質量抵抗外力所造成速度變化，達到最後的等加速度運動行為。

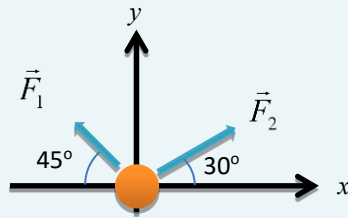


圖 5-2 兩選手同時撞擊一球的施力圖。

例題 5-1：兩位撞球選手示範合力作用下物體運動的變化。撞球的質量為 200 克，在時間為 0 秒那一瞬間兩人同時揮桿，對撞球施予  $F_1 = 6$  (牛頓) 與  $F_2 = 8$  (牛頓) 的作用力(力方向如圖 5-2 所示)。(a) 試問撞球在那一瞬间的加速度大小與方向為何？如撞球受力時間為 1 秒，在不考慮轉動摩擦力狀況下，(b) 試問撞球離開球桿後的運動行為？

(a)

由圖所定義出的座標分別寫出作用力分量大小

$$\text{其中一選手施力為 } \vec{F}_1 = 6(-\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) = -3\sqrt{2}\hat{i} + 3\sqrt{2}\hat{j}$$

$$\text{另一選手施力為 } \vec{F}_2 = 8(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) = 4\sqrt{3}\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\text{施力合為 } \vec{F}_{net} = (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})\hat{i} + (3\sqrt{2} + 4)\hat{j} = 2.69\hat{i} + 8.24\hat{j}$$

撞球國際標準單位的質量為 0.2 公斤

$$\text{撞球加速度為 } \vec{a} = \vec{F}_{net} / m = 13.45\hat{i} + 41.2\hat{j} \text{ (公尺/秒}^2\text{)}$$

(b)

在等加速度作用 1 秒後，撞球由靜止狀態改變運動狀態最後變成等速度運動狀態

$$\text{其速度為 } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\text{帶入數字為 } \vec{v} = 0 + (13.45\hat{i} + 41.2\hat{j})(1) = 13.45\hat{i} + 41.2\hat{j} \text{ (公尺/秒)}$$

## 5.4 重力

前面已經學習到我們生活的空間中，鉛直方向有一向下的重力，造成物體自由落下時表現出等加速度運動，並且由測量重力了解到重量與先前所學習的慣性質量不同，重量為物體重力的的大小，而重力是物體受地球吸引的力。地球吸引的力指向地球這個大物體的質量中心(稱為質心)位置，質心的計算與所代表的意義將在後面章節詳述，在這裡可以想像成整個地球的質量在地球球心的位置上，然後物體與地球間的距離可以視為質點(物體想像成質點)與地球球心

間的距離，以此距離可以估算出地球施與物體的重力，重力亦稱萬有引力或是地心引力。

地球近似於圓球形狀(實際上是扁球型)，且地球上覆蓋一層液體(水)，在重力作用下，因萬有引力與距離有關，地表上的水因此形成一個與地心同一距離的水平面，其實地球表面上的空氣也像液體一樣，一層一層平行於水平面、似球殼狀裹在地球表面，另一方面空氣隨著高度增加、距離地心越遠即代表地心引力越小，使得空氣越稀薄，逐漸減少到宇宙的真空狀況。

在**第 5.3 章**講質量前有提到每一物體在鉛直方向雖然重力不同，但加速度相同，因為地心引力正比於物體質量與地球質量，且反比於物體與地心距離的平方。根據牛頓第一運動定律，加速度為重力除以質量，因此推測重力所造成的加速度(重力加速度)與地球質量成正比而與距離平方成反比，水平面上的每一位置因與地心的距離相同，因此重力加速度的大小相同且方向都指向地心，一般用符號  $\vec{g}$  代表地表水平面的重力加速度，其大小約  $9.8(\text{公尺}/\text{秒}^2)$ 。

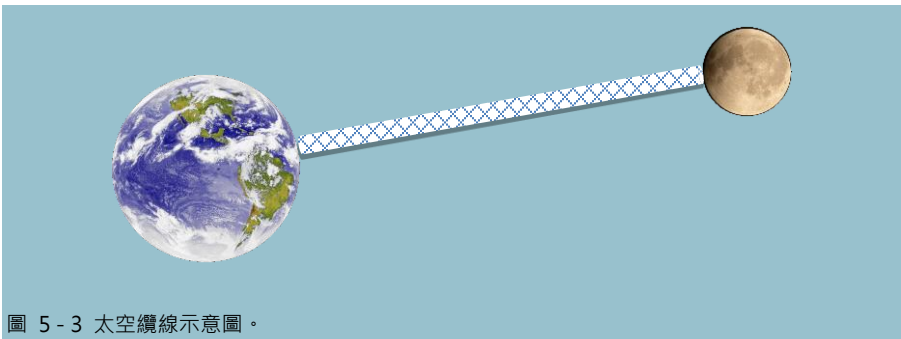


圖 5-3 太空纜線示意圖。

例題 5-2：科學家在發現奈米碳管(carbon nanotube)後，為了突顯奈米碳管的強度而提出用奈米碳管材料製作太空纜車的纜線(如圖 5-3)，主要是奈米碳管能承受超高建物總重力壓在地表上的壓力，讓我們簡單估算如下：設地球半徑為  $R$ ，水平面高度上的重力加速度為  $g$ ，且已知重力加速度隨物體與地心距離平方成反比，假如科學家自水平面高度建造一垂直向上、高度  $R$  的纜線(設每單位長度的質量為  $\lambda$ )，試估計在水平面位置的纜線材料所承受重力大小。

從纜線材料的單位長度質量，可以找到每增高長度  $dh$ ，所需材料的質量  $dm$

其關係為

$$dm = \lambda dh$$

由水平面高度重力加速度  $g$  及加速度大小與物體距地心平方成反比關係

找到重力加速度與高度關係

$$g(h) = g \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

則每增加一段高度其重力為

$$g(h)dm = g \frac{R^2}{(R+h)^2} \lambda dh$$



建至高度  $R$  之纜線總重力為 
$$\int_0^R g \frac{R^2}{(R+h)^2} \lambda dh$$

利用積分技巧，把高度變化量  $dh$ ，任意加上一個常數  $R$ ，即  $dh = d(R+h)$   
 因為常數的變化量為 0，即  $dh = 0$

總重力改寫為 
$$\int_0^R g \frac{R^2}{(R+h)^2} \lambda d(R+h)$$

再找出微分與積分的關係 
$$\frac{d}{d(R+h)} \left( \frac{1}{R+h} \right) = -\frac{1}{(R+h)^2}$$

把高度變化量移到等號右邊 
$$d \left( \frac{1}{R+h} \right) = -\frac{1}{(R+h)^2} d(R+h)$$

在與總重力積分運算比對，並更改為 
$$g \lambda R^2 \int_0^R (-1) d \left( \frac{1}{R+h} \right)$$

計算出總重力 
$$g \lambda R^2 \left[ -\frac{1}{R+h} \right]_0^R = g \lambda R^2 \left( -\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{g \lambda R}{2}$$

簡單估計其壓力值如下：設纜線材料  $\lambda = 1000$  (公斤/公尺)、纜線截面積為  $1$  (公尺<sup>2</sup>)、 $g \cong 10$  (公尺/秒<sup>2</sup>)、 $R \cong 6.4 \times 10^6$  (公尺)，則壓力為  $3.2 \times 10^{10}$  (牛頓/公尺<sup>2</sup>)。

## 5.5 牛頓第三運動定律

牛頓第二個運動定律告訴我們物體產生加速度的機制是受力的影響，再下一個問題便是探討這些力的來源與性質。牛頓第三運動定律告訴我們自然界裡力存在的普遍特性。日常生活的經驗中，我們打乒乓球時，用力反拍產生加速度，使得朝向我們手上球拍飛過來的乒乓球，改變其運動狀態反向彈飛回去，我們握著球拍的手可清楚查覺到打到球與沒打到球的差異，尤其在殺球時手更能明顯感覺到球拍被反彈造成的震動。接續這種震動的感覺，在打網球時更明顯，因為網球質量比乒乓球大許多，也因慣性質量大，要使網球從飛往球拍到飛離球拍的運動狀態改變，球拍施力需更大，相對的手感覺到的震動就更大了。再來若是更重或是速度更快的球，施力更大更能感覺到施力時的震動，譬如揮棒打棒球時候，甚至球棒會被震掉或是震斷。而震掉是因為手藉球棒施力改變球的運動狀態，同時球也藉球棒施力給揮棒的手，當手感覺到球對球棒造成慣性震動的力，進而導致手無法繼續握緊球棒對球施力而掉落。

除了打球有震動的感覺外，在進行步槍與手槍射擊訓練時，更能感覺到子彈射出那一瞬間的“後座力”。雖然子彈質量小但要在短時間內增加到極高速

度，需要很大的力，而子彈是利用火藥的反應產生氣體推動，氣體把子彈往前推的同時也會把槍身往後推，我們要頂住槍身讓槍身盡量不移動，才能確保子彈往前射擊到我們設定的目標。如果先不考量火藥與氣體等媒介，我們觀察到槍身施與子彈很強的力量使得子彈以高速飛出，同時槍身也會感受到子彈反過來推槍身的後座力。

打球時候的震動力以及步槍與手槍射擊訓練時的後座力，都是自然界裡力存在的普遍特性。

## 牛頓第三運動定律

牛頓第三運動定律又稱 *作用力與反作用力定律*，即是力成對存在的普遍特性。此 *成對存在的力，其力的大小相等而方向相反，分別作用在兩個不同的物體上*。

最明顯的例子就是重力，重力為地球吸引地表上物體的萬有引力，同樣地物體也有萬有引力吸著地球，而一個作用在物體，另一個作用在地球上，兩個力量大小相等而方向相反。如果同時把地球與物體放在同一個系統考慮，此時地球對物體的吸引力，與物體對地球的吸引力會成為系統內的內力，且此兩個內力大小相等而方向相反，在系統外觀察到兩個內力會相互抵消而觀察不到力的呈現。地球對物體的吸引力可用符號表示為  $F_{Em}$ ，其中  $E$  代表地球、 $m$  代表物體，或者以數字 1 表示地球，而數字 2 表示物體，則地球對物體吸引力表示為  $F_{12}$ 。特別注意此時力的下標所代表的意義與物理位移向量不同，當  $F_{12}$  下標表示 1 號物體對 2 號物體施力，反之  $F_{21}$  則表示 2 號物體對 1 號物體施力。

當槍枝發射子彈，即槍枝施力給質量小的子彈產生高速，子彈同時也施力給質量大的槍身產生後座力。在這裡子彈質量小、慣性小因此加速度大，而槍身質量大、慣性大，雖然承受與子彈一樣大小的後座力，但造成的加速度很小所以相對地位移很小。

## 大自然超距力

牛頓第三運動定律已經提出自然力的基本特性，即是任何自然力都至少有兩物體間相互施予對方作用力，且施予對方的力為大小相等、方向相反。[第 5.2 章](#)所提到的接觸力與超距力似乎都具備自然力基本特性，即作用力與反作用力成對且同時產生。

在[第 5.2 章](#)學習力的形式時提到巨觀的接觸力與超距力(非接觸力)：碰觸物體才能對物體施力，使物體產生加速度並改變原先等速度運動的狀態，這樣的施力稱為巨觀上的接觸力；沒有碰觸物體也能持續對物體施力產生加速度，譬如地球上物體所受的重力，這樣的施力稱為超距力。

為何要特別稱接觸力為“巨觀上”觀察的結果呢？自然界有那幾種力呢？只有接觸力跟超距力嗎？

自然界其實只有四種力，這四種力所影響的尺度範圍差異很大。最大尺度的是萬有引力(**gravitational forces**)，在我們日常生活的空間裡，從幾公分、幾公尺到太陽系的距離都是以萬有引力為主的尺度範圍。當尺度比公分還小，一直縮小到原子尺度範圍，主要以電磁作用力(**electromagnetic forces**)在操控這個尺度空間的物質世界。當尺度範圍持續縮減至原子核的直徑大小時，則以強作用力(讓質子與中子束縛在原子核空間的力，**strong nuclear forces**)與弱作用力(某些原子核內的粒子於衰變過程中發生，**weak nuclear forces**)在主導物質世界。

綜上所述，四大自然力為：

1. 萬有引力。
2. 電磁作用力。
3. 強作用力。
4. 弱作用力。

在尺度範圍比原子大以至於我們人類生活的空間，都是屬電磁作用力，那接觸力是甚麼？

**圖 5-4** 中手用力抓住嬰幼兒的身體，當生物體(有機物，**organics**)互相碰觸時，我們觀察到可形變彎曲的生物體會被擠壓形變，然後由一物體施力作用在另一物體上，施力再大也只是形變更大、更明顯，並沒有把兩物體真正結合在一起。我們知道物體要結合需要鍵結，譬如在一個生物體上，他身上由碳氫氧原子構成，且原子間都有鍵結相互束縛，即便是生物體受力形變也還是無法把原鍵結的原子與生物體分離。圖上用大人的手抓住嬰兒身體，「接觸」的部分用效果良好的放大鏡放大到  $10^7$  倍時，可以看到嬰兒身體上的碳氫氧原子(如橘色球所示)，同時大手上的原子如藍色球所示，自己身體上的原子都是緊密地鍵結，而大手與嬰兒身體之間確有一道相對較寬的鴻溝，或者說是有較大間隙，這個間隙在受力較小時會變大，而受力較大時只是縮小間隙，但還是無法壓縮間隙進到原子與原子間的鍵結距離；物體間因有電磁作用力所建構的凡得瓦力，當兩物體距離夠近時凡得瓦力表現出排斥的力量，使得物體間持續維持著一個小間隙而不至於鍵結在一起。這巨觀上的接觸力在微觀尺度上看來還是屬超距力，所以我們提到的自然界四大力都是超距力，不存在接觸力。

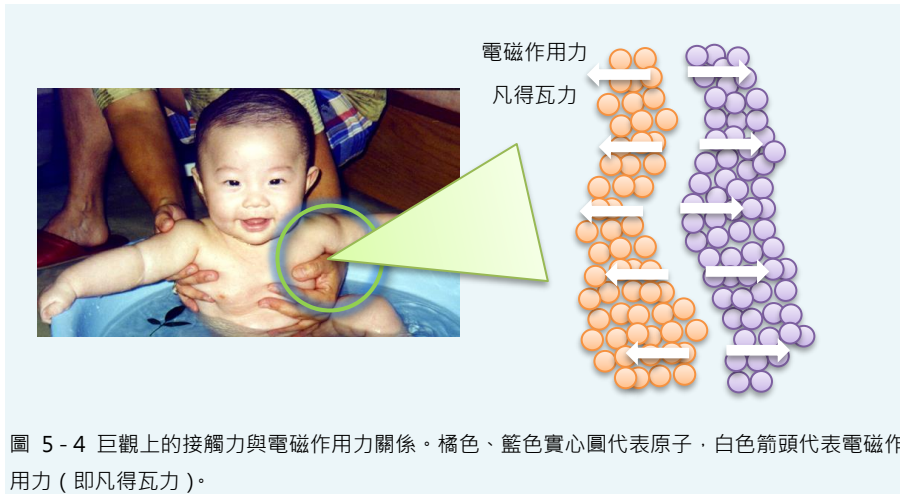


圖 5 - 4 巨觀上的接觸力與電磁作用力關係。橘色、藍色實心圓代表原子，白色箭頭代表電磁作用力 (即凡得瓦力)。

更進一步看有機物(organics)與無機物(inorganics)的原子間鍵結與距離的關係，我們發現到原子鍵結的距離很短，而且是以電磁作用力互相吸引而形成鍵結，但是原子與原子間還是沒有真的接觸在一起，因為電磁作用力是超距力，不需要真正接觸就能有足夠大的鍵結吸引力，把原子束縛在物體內。

從我們生活的尺度開始，把尺度縮小會進入完全受電磁作用力操控的物質世界，這可以從簡單的實驗中觀察得到：我們在學習電學時，會用塑膠尺與布摩擦讓塑膠尺產生電荷，我們會撕小紙片讓塑膠尺吸引，測試塑膠尺上有電荷可產生超距吸引力。在做實驗時我們發現紙片較大時，很容易從塑膠尺上落下，因此我們會把紙片撕成更小的片段，這時候只有非常細小的紙片能夠一直被塑膠尺吸引而不掉落。這個實驗主要呈現出重力與電磁作用力相互競爭的結果，當紙片較大時，此時重力還是紙片的主要作用力，所以重力會克服電磁作用力而使得紙片掉落。反之，當紙片夠小時，電磁作用力大於重力，紙片會一直被吸引在塑膠尺上。

## 5.6 牛頓力學的初階應用

在學習牛頓力學的應用之前，我們簡單複習力與運動之間的關係。我們以撞球桌上的球來當例子，假如撞球桌的桌面與水平面平行，撞球在桌面上靜止不動，我們知道所有有質量的物體都會受鉛直向下的重力作用，接下來我們要進一步探索作用力、靜止不動、等速度運動與等加速度運動之間的關係。

### 靜力平衡

撞球的鉛直方向受重力作用但仍靜止在桌面上，原因為何？撞球之所以受

重力而靜止不動是因為有桌面支撐，並施予撞球一個與重力大小相同、方向相反的力，此時桌面施予撞球向上與地球施予撞球向下的重力(注意兩力同時作用在同一個物體-撞球-上)，物體在此合力為零的作用下，呈現靜止不動的狀態。此外，撞球在水平方向不受外力作用下，亦呈現靜止不動的狀態。

依據牛頓第一運動定律，物體在不受外力或是合力為零的狀態下，靜者恆靜、動者恆動。大部分在合力為零的靜力平衡下，物體都是靜止不動，或者是水平方向作等速度運動，譬如撞球被球桿擊出後的運動狀態。在後面章節我們會學習到靜電力(electrostatic force)與勞倫茲力(Lorentz force)，當兩者達到靜力平衡情況下，也能觀察到帶電粒子以等速度運動。

在牛頓力學應用題中，如觀察到物體為靜止不動的狀態(較少例子以等速度運動的物體來練習靜力平衡)，我們只需找出合力為零的條件，藉此條件找到所有施力的大小與方向即可。

## 等加速度運動

如果把撞球桌面移開不再支撐桌上的撞球，則撞球在鉛直方向受重力作用而有等加速度運動，即呈現自由落體行為。在牛頓力學應用題中，如觀察到合力不為零的情況下，則根據牛頓第二運動定律可以找到物體的加速度，找到加速度後可計算出物體的速度與位置向量，可用來描述物體隨時間改變的運動行為。

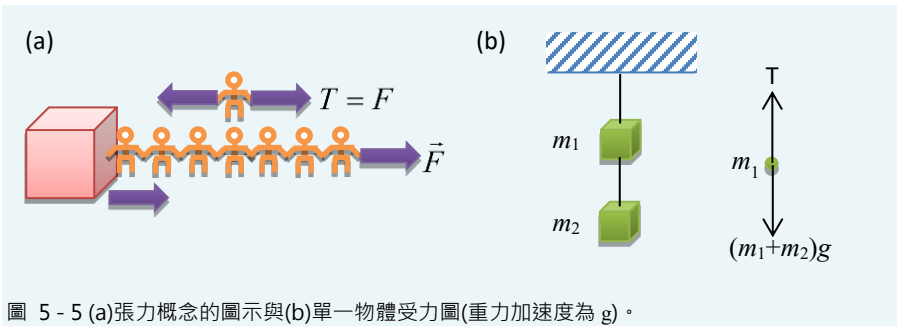


圖 5 - 5 (a)張力概念的圖示與(b)單一物體受力圖(重力加速度為  $g$ )。

## 張力(tension)

用可彎曲的材料做成一維能傳遞力量的繩索，繩索內部所傳遞的力稱為張力，利用繩索除可傳遞大小相同的力以外，更可以改變力的方向。可彎曲的繩索材料除了一般常見的繩子外，也可用鋼鐵等堅硬材料做成鐵環，然後環環相扣形成鐵鏈來傳遞更大的力量，即承受更大的張力。鐵環在鐵鏈受張力時所扮演的角色如圖 5 - 5(a)所示，人與人牽手拉動物體的概念相同，每個人與鐵環都同時受到兩個方向相反且大小相同的張力對拉，因此可能在張力過大時，造成其中一個最不能承受對拉力量的鐵環斷裂，因而拉斷鐵鏈或是繩索。利用此

一維線材來傳遞力量與改變力的方向，是物理與機械領域裡重要的發展之一。

## 單一物體受力圖(free-body diagram)

單一物體受力圖是將該物體視為質點，並把施予物體的所有力在質心上畫出來，可表示出該物體為靜力平衡，或是表示出物體所受合力以計算加速度大小。圖 5-5(b)的左圖表示兩物體  $m_1$  與  $m_2$  被繩子吊掛在天花板上，此時  $m_1$  物體的質心上除了受重力下拉外，還受到經下方繩子所傳遞來的  $m_2$  物體重力，鉛直向上的力則為  $m_1$  物體上方的繩子施予質心向上的拉力(張力  $\vec{T}$ )，此時張力與  $m_1$  及  $m_2$  的總重力相同。 $m_1$  物體的質心與受力畫成如圖 5-5(b)的右圖稱為單一物體受力圖，將複雜的多物體受力問題簡化成單一物體受力後，更容易用牛頓定律來預測物體的運動狀態。

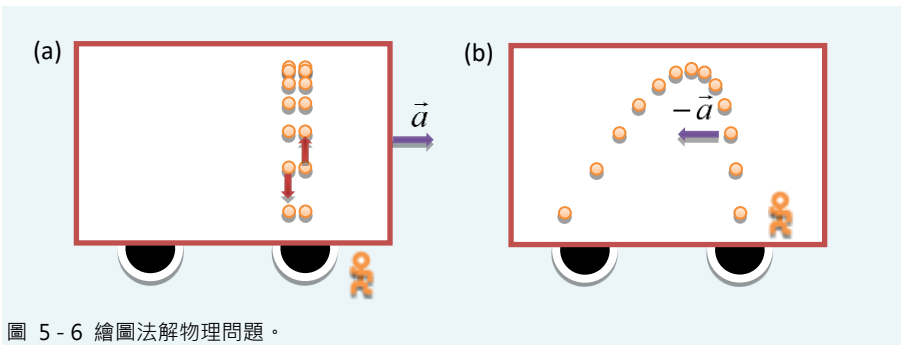


圖 5-6 繪圖法解物理問題。

## 繪圖法解物理問題

很多物理問題可能在符號與運算上很複雜，但卻可以很簡單的利用繪圖來解決問題。譬如在等加速度的車內進行上拋物體的運動，在車外觀察則為該物體水平方向不受力而呈現自由落體運動，如圖 5-1(a)所示。如果站在車內觀察，因為車體受加速度向右移動，在車內的觀察者(座標系統)會以為車體不動而車內所有物體受到向左的等加速度  $-\vec{a}$  作用，因此物體會同時受到重力加速度與  $-\vec{a}$  兩個加速度作用，而呈現如圖 5-1(b)所示的結果。

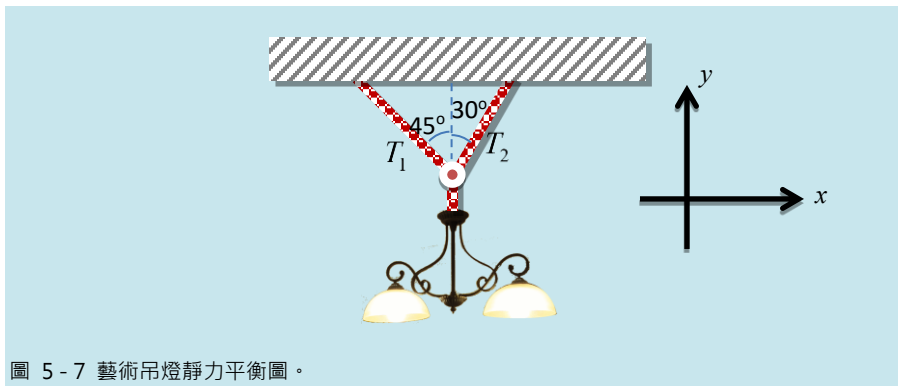


圖 5-7 藝術吊燈靜力平衡圖。

例題 5-3：如圖 5-7 藝術吊燈 50 牛頓重，用兩繩的合力吊掛在天花板下方，角度如圖上所示，試問兩繩之張力大小為何？

從藝術吊燈是靜止不動的狀態，可判斷吊燈在水平與鉛直方向受力的合力都是 0。  
如圖定義出水平方向為  $x$  而鉛直方向為  $y$ ，三個繩子的力量在交叉處呈現靜力平衡。

在鉛直方向繩子傳遞藝術吊燈向下的重力  $-50\hat{j}$  (牛頓)。

$$\text{張力 } T_1 \text{ 向量表示為 } -T_1 \cos 45^\circ \hat{i} + T_1 \sin 45^\circ \hat{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} T_1 \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 \hat{j}$$

$$\text{張力 } T_2 \text{ 向量表示為 } T_2 \sin 30^\circ \hat{i} + T_2 \cos 30^\circ \hat{j} = \frac{T_2}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 \hat{j}$$

$$\text{水平方向合力為 0 可得 } -\frac{\sqrt{2}}{2} T_1 + \frac{T_2}{2} = 0 \text{ 即 } T_2 = 1.414 T_1$$

$$\text{垂直方向合力為 0 可得 } \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 - 50 = 0$$

$$\text{整理後得到兩個關係式 } T_2 = 1.414 T_1 \text{ 與 } 1.414 T_1 + 1.732 T_2 = 100$$

$$\text{解得 } T_1 = 25.9 \text{ (N)} \cdot T_2 = 36.6 \text{ (N)} \cdot$$

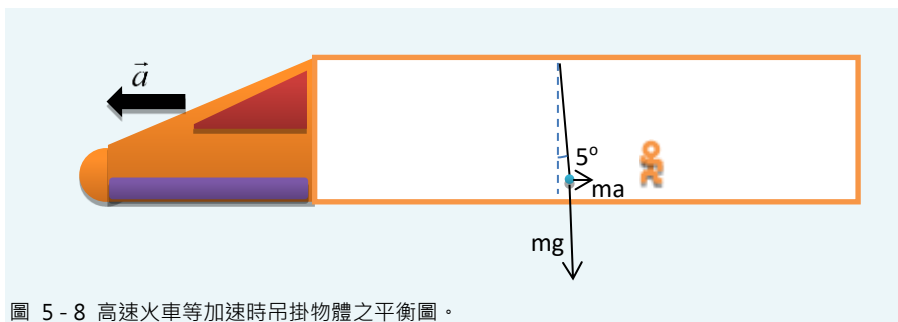


圖 5-8 高速火車等加速時吊掛物體之平衡圖。

例題 5-4：如圖 5-7 高速火車由月台啟動加速到 300(公里/時)，在車內用繩子吊一重物，測量到

繩子與鉛直方向夾  $5^\circ$  角，試計算出高速火車的加速度。(設重力加速度  $g=9.8(\text{公尺}/\text{秒}^2)$ 。)

設物體質量為  $m$ ，因高速火車之加速度運動造成水平方向受力  $ma$   
鉛直方向因重力造成物體向下受力  $mg$

因車廂內觀察到物體靜止不動。

研判此二力與繩子的張力造成水平方向合力為 0，且鉛直方向合力亦為 0。

因此可得到角度與力的關係為  $\tan 5^\circ = \frac{ma}{mg}$

以重力加速度  $g = 9.8 (\text{m/s}^2)$ 。

估算高速火車加速度  $a = 9.8 \times \tan 5^\circ = 0.857 (\text{m/s}^2)$

單位轉換後加速度為  $3.09 (\text{km/h/s})$

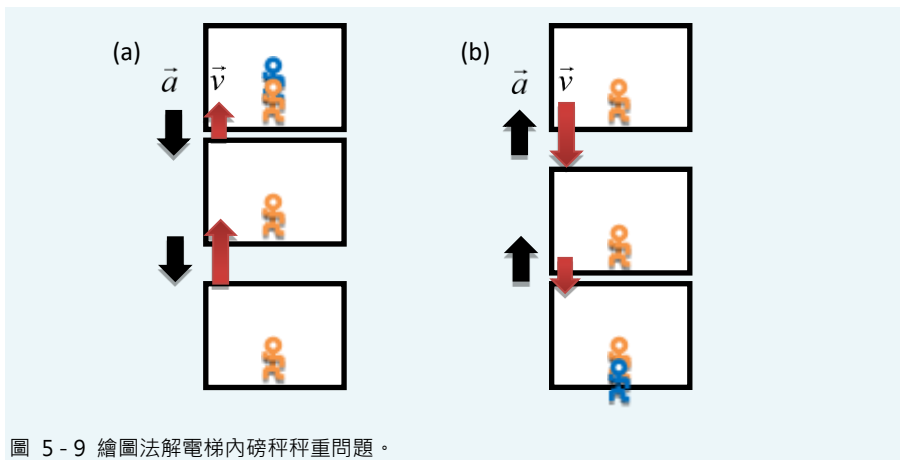


圖 5-9 繪圖法解電梯內磅秤秤重問題。

例題 5-5：一位學生拿磅秤在電梯內秤體重，當電梯上樓到達某樓層與下樓到達某樓層時，磅秤所測得的體重如何變化？

**圖 5-9(a)** 為電梯上樓抵達某樓層前的減速行為，電梯往上且逐漸減速時，學生仍以未減速之等速度運動向上而抵達藍色小人位置，實際上電梯減速後抵達橘色小人位置，藍色小人藉著重力到達橘色小人位置(減小重力)，因此磅秤所測得重量減輕。

**圖 5-9(b)** 為電梯下樓抵達某樓層前的減速行為，電梯往下且逐漸減速時，學生仍以未減速之等速度運動向下而抵達藍色小人位置，實際受電梯支撐磅秤與學生的力量使得學生維持在橘色小人位置，因此磅秤所測重量增加。亦可想像成原本慣性運動應該到達藍色小人位置，受到磅秤額外向上的力量而維持在橘色小人位置。



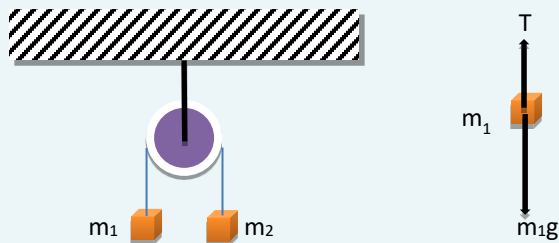


圖 5 - 10 兩物體懸掛定滑輪兩側之圖。

例題 5-6：兩物體質量各為  $m_1$  與  $m_2$ ，且  $m_1 > m_2$ ，懸掛在定滑輪兩側(如圖 5-10 所示)，試找出此系統的加速度大小。(設重力加速度為  $g$ 。)

由圖中得知張力對兩物體施予向上的力量，觀察出繩子可傳遞力的大小與改變力的方向。

由  $m_1 > m_2$  的關係，可判斷出  $m_1$  向下、而  $m_2$  向上加速度運動

物體  $m_1$  的單一物體受力如圖中右圖所示

由牛頓第二運動定律推導  $m_1$  的受力與加速度關係

$$F = m_1 a$$

此時向下為正的受力方向，則合力與加速度關係

$$F = m_1 g - T = m_1 a \quad (1)$$

$m_2$  的受力與加速度關係

$$F' = m_2 a$$

此時向上為正的受力方向，則合力與加速度關係

$$T - m_2 g = m_2 a \quad (2)$$

將式(1)與式(2)相加消去張力可得

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

最後找到兩物體相同的加速度大小

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

另解：

找出作用在兩物體間的合力

兩物體重力經由繩子傳遞而相互抵消，因此合力為  $m_1 g - m_2 g$

此合力作用在兩物體  $m_1$  與  $m_2$  上，使得兩物體產生比例 1 比 1 的位移，即相同加速度

則此系統之加速度為合力除以系統的總質量  $(m_1 - m_2)g / (m_1 + m_2)$

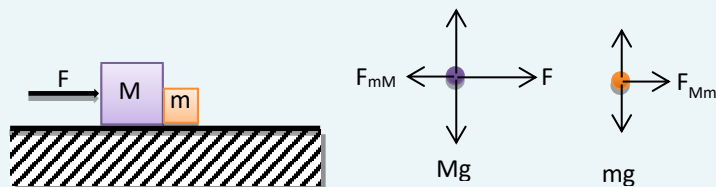


圖 5 - 11 外力平推兩物體使得兩物體作等加速度運動。

例題 5-7：如圖 5-11 所示物體 1 質量為  $M$ 、物體 2 質量為  $m$ ，放在無摩擦力的水平桌面上，用一外力  $F$  推物體 1 使得兩物體作等加速度運動，試計算其加速度與內力大小各為何？

圖中右側繪製出兩物體各自的單一物體受力圖

此例題直接表示出物體 1 與物體 2 之間的作用力與反作用力之內力問題

$F_{Mm}$  (或寫成  $F_{12}$ ) 表示物體 1 作用在物體 2 的作用力

$F_{mM}$  (或寫成  $F_{21}$ ) 表示物體 2 作用在物體 1 的作用力

除了水平方向受力外，兩物體在鉛直方向受重力，同時各受桌面向上支撐力抵消重力，因此鉛直方向保持原本靜止狀態

水平方向符合牛頓第二運動定律，分別對物體 1 與物體 2 分析力與加速度關係

$$\text{物體 1} \quad F - |\vec{F}_{21}| = Ma \quad (1)$$

$$\text{物體 2} \quad |\vec{F}_{12}| = ma \quad (2)$$

這裡為避開向量問題，特別使用長度符號，如只考慮大小則  $|\vec{F}_{12}| - |\vec{F}_{21}| = 0$ 。

如同時考慮方向問題則  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ ，視讀者喜好擇一使用。

式(1)與式(2)相加消去內力得 
$$F = (M + m)a$$

兩物體相同加速度大小為 
$$a = \frac{F}{M + m}$$

且內力大小為 
$$|\vec{F}_{12}| = F - M \frac{F}{M + m} = \frac{m}{M + m} F$$

另解：

水平方向的合力為  $F$ ，且兩物體受力運動之位移量相同則加速度大小相同

則可由觀察結果推論加速度為  $F / (M + m)$

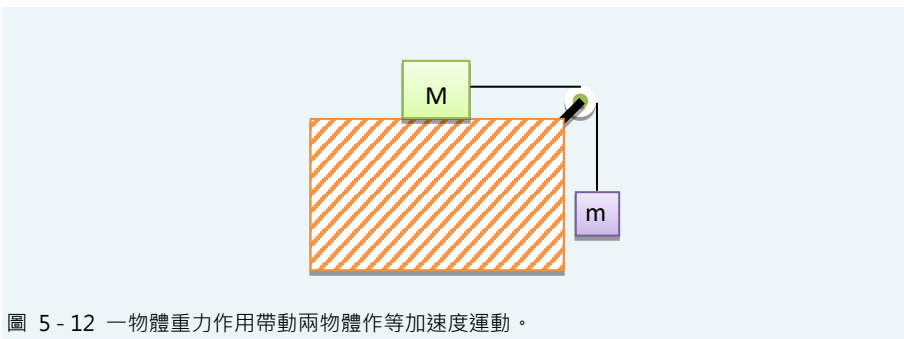


圖 5-12 一物體重力作用帶動兩物體作等加速度運動。

例題 5-8：如圖 5-12 所示，物體 1 質量為  $M$  置放在無摩擦力水平面上，用一繩子牽引到鉛直向下的物體 2 (質量為  $m$ ) 上，試計算此兩物體的加速度大小。(設重力加速度為  $g$ 。)

分析物體 1 受力：鉛直方向重力與桌面支撐力相互抵消，水平方向受張力拉動以等加速度運動

$$T = Ma \quad (1)$$

物體 2 受力：鉛直方向受重力與繩子張力削減後合力使得物體 2 以等加速度運動

$$mg - T = ma \quad (2)$$

式(1)與式(2)相加消去張力  $mg = (M + m)a$

兩物體相同的加速度大小為  $a = mg / (M + m)$

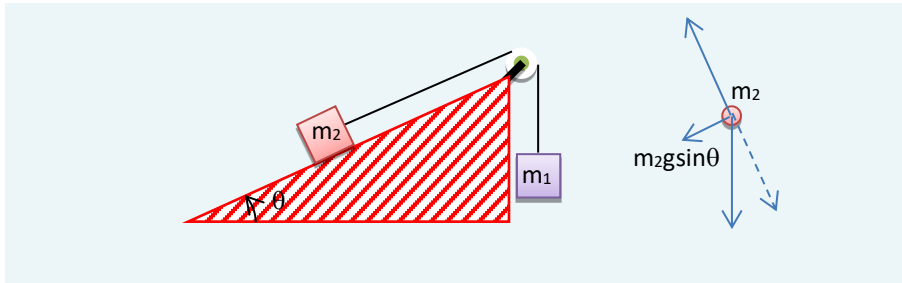


圖 5 - 13 結合斜坡與定滑輪之等加速度運動。

例題 5-9：如圖 5 - 13 一物體  $m_1$  懸掛於定滑輪上並鉛直下拉位在斜坡上的物體  $m_2$ 。假設  $m_1$  的重力比斜坡上  $m_2$  下滑的拉力大。試問此兩物體的加速度大小。(設重力加速度為  $g$ 。)

藉由此例題順便介紹斜坡的功能，在下降相同高度的條件下。

斜坡具改變運動方向、減小加速度及增加運動時間等功能。

此例題中斜坡提供垂直於斜坡的正向力支撐物體  $m_2$ ，而  $m_2$  受斜坡正向力支撐後，只剩下沿斜坡下滑的分力

物體  $m_1$  重力與  $m_1$  沿斜坡下滑分力相抵消後的合力為  $m_1g - m_2g \sin \theta$

因兩物體位移量及加速度相同，則共同分享合力後

兩物體相同的加速度大小為  $(m_1g - m_2g \sin \theta) / (m_1 + m_2)$

從以上的幾個應用例題可歸納出牛頓力學主要應用在兩種情形下：第一種情形是觀察到物體為靜止或作等速度運動，推論作用在物體上的合力為  $0$ ，因此可找到物體上的每一個作用力。第二種情形是觀察到物體所受作用力的合力不為  $0$ ，須先找到合力的大小與方向後，再應用牛頓第二運動定律計算出物體的加速度大小，並可預測物體後續的速度大小與位移隨時間變化關係。

## 5.7 摩擦力

在前面的例子中，我們在水平方向對靜止在水平桌面上的物體施力，使物體由靜止開始加速運動，停止施力後物體應該是維持等速度運動，但是實際的狀況是停止施力後，物體會受到一個與運動速度方向相反的阻滯力(稱為摩擦

力)，使得物體逐漸遞減速度，最後靜止在桌面上。前述所提造成減速的摩擦力，只有在物體運動過程中才會產生反方向的阻滯力量，一旦當物體完全停止時，此摩擦力量會自動消失，並不會持續作用產生反方向的速度，由此可推論阻滯物體運動的力只有在發生運動的狀態下，也就是物體速度不為零時才會受到摩擦力的作用影響。

前面所提的是物體運動時所受到的“動摩擦力”，在物體靜止時此力會消失。另一個生活經驗是在推大型靜止重物時，我們發現到一開始用力推時物體仍然靜止不動，那麼我們的力量肯定是被另一個作用力抵消，物體才會繼續靜止在原地，這個在物體靜止不動時能抵消我們施力的摩擦力，會隨著我們施力的大小而改變，我們施力大的時候摩擦力變大，施力小的時候相對的摩擦力也變小。物體靜止時有抵消外力的摩擦力，物體運動時亦有與運動方向相反來阻礙運動的摩擦力，這兩個摩擦力不相同，因此分別稱為“靜摩擦力”與“動摩擦力”。靜摩擦力的大小與方向都隨著不同的外力而改變，動摩擦力與外力無關，但它大小固定且方向一定與物體運動方向相反。

當我們平推靜止的重物時，隨著我們施力的增加摩擦力亦跟著增加，使得物體所受合力為零，而當我们用盡最大力量推動重物的那一剎那，在那一瞬間我們施力與最大的靜摩擦力相同，接下來我們發現到物體被推動且是加速度運動。我們對物體所施予的外力，在推動瞬間稱為“最大靜摩擦力”，而且當物體開始運動時靜摩擦力應該消失，緊接著出現動摩擦力來阻止物體運動。想像在物體被推動的那一瞬間，外來的施力剛好等於最大靜摩擦力，當靜摩擦力消失後，此外力除了可克服物體運動時的動摩擦力外，還有剩餘的力量來加速物體運動，由此可知動摩擦力與靜摩擦力性質不同，且最大靜摩擦力比動摩擦力大。

舉例來說，在風比較大的地方，有時候較輕的筆記本會被風吹動(在水平方向運動)，這時候我們會習慣在筆記本上增加其它較重的物品，當重量增加後風就無法把筆記本吹動。我們增加重量的動作是在增加靜摩擦力，當最大靜摩擦力增加時，這時風吹的力量小於最大靜摩擦力，因此無法吹動筆記本。在汽車的座位上放書本，當車子加速、煞車或是轉彎時，書本可能會滑落到腳踏墊上，此時我們可把幾本書疊在一起，因為書與書之間的接觸面比較不會滑動，而當書本疊在第一本書上，可以增加第一本書與座椅間的作用力來提高最大靜摩擦力，因此書本較不容易因車子速度的改變而滑落到椅子下。

前面提到增加重量可以提高靜摩擦力，但是重力垂直於摩擦力所在的水平面上，是否為摩擦力的特性？當我們把物體壓在鉛直的牆面上，此時物體會靜止停在牆面上，但如果我們不施力了，物體就會掉下來，我們觀察沒有垂直於牆面持續對物體施力，則物體與牆面之間就沒有摩擦力可以抵消物體的重力，使得物體受重力產生加速度落下。如果兩面牆距離很近使得我們可以用雙手各

推一面牆，即便是牆面有點光滑，但我們仍能垂直牆面施力來獲得摩擦力的支撐，進而使身體往上攀爬。

摩擦力發生在兩物體間的接觸介面，從以上生活經驗我們得知，摩擦力與垂直於接觸介面的正向力(符號用  $\vec{N}$ )有關。此外越粗糙不平的接觸介面摩擦力越大，因此將幾種不同的摩擦力整理如下(注意正向力  $\vec{N}$  與摩擦力方向相互垂直)：

1. 最大靜摩擦力  $f_{s,\max} = \mu_s N$ ， $\mu_s$  為靜摩擦係數。
2. 動摩擦力  $f_k = \mu_k N$ ， $\mu_k$  為滑動摩擦係數。
3. 滾動摩擦力  $f_r = \mu_r N$ ， $\mu_r$  為滾動摩擦係數。

在動摩擦力方面特別提出滾動摩擦力，主要是兩個摩擦力的性質不同。譬如將汽車或摩托車踩(拉)剎車後再來推車，另外沒有踩剎車且變速箱放在空檔(N檔)時來推車，我們發現在後者的情況汽車可能重達 1500 公斤，我們仍可以施力克服摩擦力來持續讓汽車往前緩慢行走，但是在前者因剎車時輪胎無法轉動則推不動汽車。從前面的討論中，我們知道動摩擦力略小於最大靜摩擦力，而當汽車輪胎可以滾動時，此時滾動摩擦力比“輪子不能滾動條件下的最大靜摩擦力”小很多。此外當輪子可以滾動時，我們也要克服“輪子能滾動條件下的最大靜摩擦力”，也是略大於滾動摩擦力。只有在物體運動時才會產生滾動摩擦力與動摩擦力，且是大小固定、但施力方向與運動方向相反；另外滾動摩擦力比動摩擦力小很多，且介面上產生此阻力的機制不同。

另一個例子是保齡球，在擲保齡球時盡量保持保齡球的轉動，這樣受到滾動摩擦力的阻礙較小，此時保齡球可以維持擲出去時的速度撞擊保齡球瓶，如果擲出去時保齡球以滑動方式往前走，則在較粗糙的軌道上會受到大的動摩擦力，使得保齡球前進速度減緩而無法擊倒較多的保齡球瓶。

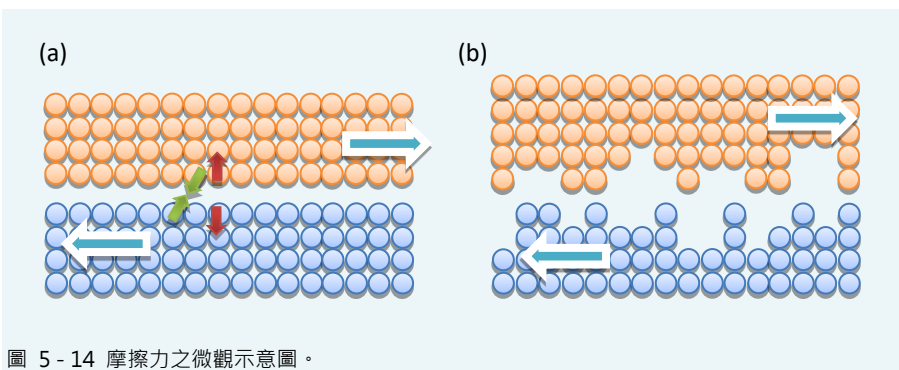


圖 5 - 14 摩擦力之微觀示意圖。

## 微觀討論摩擦力

前面提到從原子到我們生活週遭的尺度範圍，是以電磁作用力為物質世界

的主要作用力。電磁作用力在單原子內可以描述電子與原子核之間力的關係。而原子與原子間的電磁作用力，可以改成以金屬鍵結、共價鍵結與離子鍵結等語言來描述。如果原子數目逐漸增加，我們把所有原子間相互的電磁作用力都考慮進來，可以簡單的以凡得瓦力來描述，所以凡得瓦力是多原子間的電磁作用力加總後的合力。

摩擦力在兩物體間有接觸時才產生，接觸的面稱為接觸介面，在接觸介面上，兩物體的原子排列圖，可以用圖 5-14 的示意圖表示。(a)圖代表兩個物體以非常平整的表面來形成接觸介面，在這樣表面平整的情況下，垂直於這個接觸介面施予正向力後，兩物體表面的原子因距離夠近而產生凡得瓦力，凡得瓦力在此距離下，垂直於接觸面方向先是產生相互吸引的力量，當把兩物體間距離縮更近時，垂直於接觸面方向變成相互排斥的力量。一般在距離很近時排斥力增加很快，所以可以維持兩物體間保留一個間隙(如圖 5-14(a)紅色箭頭所示)。另在兩物體表面上較遠距離的原子間仍存有互相吸引的凡得瓦力(如圖 5-14(a)綠色箭頭所示)，此吸引力平行於介面上的分力即為摩擦力。摩擦力與接觸介面上的表面粗糙度有很大的關係，譬如圖 5-14(b)為較粗糙表面的示意圖，在粗糙表面情形下，還需要克服兩物體間彼此鑲嵌住的力量。

## 摩擦係數的量測

我們用一個可以製造斜坡效果的平板與物體，來測量出平板與物體之間的靜摩擦係數與動摩擦係數，如下面例題所示。

例題 5-10：為測量物體與平板間摩擦力，將物體(質量  $m$ ) 水平放在平板上，並緩慢抬高平板的一端製造斜坡如圖 5-15 所示。(a)當平板抬高到與水平面間夾角達  $\theta_c$  值時，物體開始下滑，試計算平板與物體間的靜摩擦係數。(b)如物體滑動距離  $s$  後所耗時間為  $t$ ，試計算平板與物體間的動摩擦係數。(設重力加速度為  $g$ 。)

(a)靜摩擦係數

斜坡所提供的正向力作用在物體質心上，此正向力與物體重力合力為  $mg \sin \theta$

造成摩擦力之正向作用力，為物體重力在垂直斜坡方向的分力  $mg \cos \theta$

當斜坡與水平面間角度達到臨界夾角  $\theta_c$  時，此時摩擦力恰等於沿斜坡下滑的重力分力

$$f_{s,\max} = mg \sin \theta_c$$

而正向力為

$$N = mg \cos \theta_c$$

則可由摩擦力與正向力關係  $f_{s,\max} = \mu_s N$ ,  $mg \sin \theta_c = \mu_s mg \cos \theta_c$

獲得靜摩擦係數

$$\theta_c = \tan \theta_c$$

(b)動摩擦係數

當物體開始下滑時，物體重力之斜坡方向分力克服動摩擦力後，

多餘的力量即造成下滑加速度運動，施予物體質心的合力為  $F = mg \sin \theta_c - f_k$

動摩擦力與正向力關係為  $f_k = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta_c$

物體下滑合力整理為  $mg(\sin \theta_c - \mu_k \cos \theta_c)$

則加速度為  $g(\sin \theta_c - \mu_k \cos \theta_c)$

從滑動距離與時間亦可推測加速度為  $a = 2s / t^2$

則動摩擦係數為  $\mu_k = \frac{g \sin \theta_c - 2s / t^2}{g \cos \theta_c}$

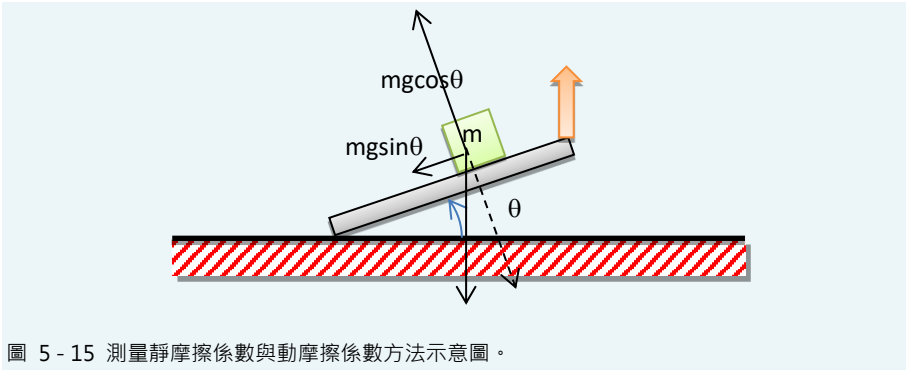


圖 5 - 15 測量靜摩擦係數與動摩擦係數方法示意圖。

例題 5-11：如例題 5-8 之圖 5-12 所示，物體 1 質量為  $M$  置放在有摩擦力的水平桌面上(動摩擦係數為  $\mu_k$ )，用一繩子牽引到鉛直向下的物體 2(質量為  $m$ )上，試計算此兩物體的加速度大小。(設重力加速度為  $g$ 。)

分析物體 1 受力：鉛直方向重力及桌面支撐力相互抵消，水平方向受張力抵消摩擦力後，可拉動物體以等加速度運動

$$T - f_k = Ma, T - Mg\mu_k = Ma \quad (1)$$

物體 2 受力：鉛直方向受重力與繩子張力削減後，合力使得物體 2 以等加速度運動

$$mg - T = ma \quad (2)$$

式(1)與式(2)相加消去張力  $mg - Mg\mu_k = (M + m)a$

兩物體相同的加速度大小為  $a = (mg - Mg\mu_k) / (M + m)$

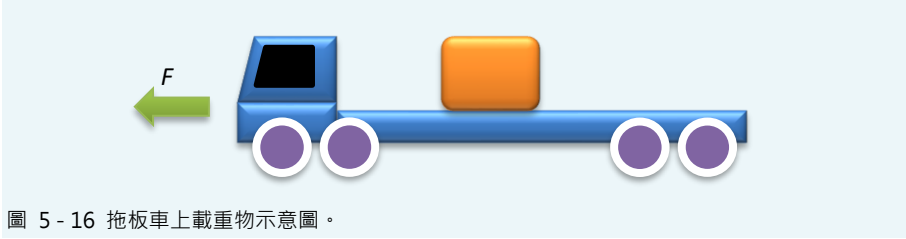


圖 5 - 16 拖板車上載重物示意圖。

例題 5-12：如圖 5-12 拖板車(質量為  $M$ )上載一重物(質量為  $m$ )，設重物與拖板車間的動摩擦係數與靜摩擦係數分別為  $\mu_k$  與  $\mu_s$ ，且拖板車引擎的加速力量為  $F$ ，試問(a)在重物不動的情況下，拖板車引擎最大力量為何？(b)當拖板車引擎加速力量大到可使重物在拖板車上滑動，拖板車與重物的加速度各為何？(設重力加速度為  $g$ 。)

(a)

重物不動情況下，重物之最大靜摩擦力為  $f_{s,\max} = mg\mu_s$

此最大靜摩擦力恰等於拉動重物向前等加速度運動的力  $mg\mu_s = ma$

因此拖板車與重物的加速度皆為

$$a = g\mu_s$$

則引擎施力為

$$F = (M + m)a = (M + m)g\mu_s$$

(b)

當  $F$  夠大時，重物在拖板車上滑動。

此時站在路面上靜止不動的觀察者，看到重物作等加速度運動，所受系統內力為動摩擦力

則重物之受力與加速度為

$$f_k = mg\mu_k = ma$$

重物之加速度為

$$a = g\mu_k$$

此時拖板車引擎推力有部分損失抵消摩擦力，剩餘的力造成拖板車加速度

拖板車受力與加速度關係為

$$F - mg\mu_k = Ma$$

整理出拖板車加速度為

$$a = \frac{F - mg\mu_k}{M}$$

前面我們討論的靜摩擦力與動摩擦力在日常生活上的應用非常多，從我們向前走路是由摩擦力向前推著我們走的例子開始，到向前滾動、或由斜坡向下滾動等也是由朝著運動方向的摩擦力來作用；摩擦力更進階的應用還能用來做奈米尺度的步進器，此儀器是利用最大靜摩擦力與動摩擦力的大小不同，可以讓物體移動的每一個步伐，固定距離在小於 100 奈米的長度。

由另一個例子來看，因為最大靜摩擦力的阻礙影響，我們在開始那一瞬間要啟動冷氣、馬達與壓縮機等機器時，需要用更大的力量也就是用更大電流的電力才能開始啟動，為了解決那一瞬間要克服最大靜摩擦力所需的推力，在馬達的設計上都會有啟動電容，就是把電荷累積在電容上，啟動那一瞬間可釋放出的電流使得電力足夠推動機器，然後才開始運轉。開始運轉以後，要維持運轉只需克服動摩擦力，動摩擦力比最大靜摩擦力小很多。現在新式電器的設計，為了降低啟動電流的負擔，市面上已出現變頻的設計。譬如早期冷氣的室外壓縮機，原本設計是溫度較高時就會啟動室外壓縮機，當溫度達到某一低溫時會停止運轉，且室外壓縮機在運轉一段時間後，為避免過熱也須停止運轉，多次反覆的停止與啟動壓縮機會增加啟動電流的消耗量，並浪費許多能量在克服最大靜摩擦力上。為了降低啟動電流的消耗量，新式的變頻設計並沒有真的停止室外機的運轉，而是讓室外機用最低的頻率、最慢的轉速運轉，當需要室外機



啟動冷卻幫浦時，此時室外機即會恢復高頻率的快速運轉。

## 習題