第六章 牛頓力學進階應用(Advanced Applications of Newtonian Mechanics)

前一章提出牛頓力學機制來解釋物體在直線上運動，所表現出來的靜止不動、等速度與等加速度運動的行為。除了直線運動外，我們生活上乘坐交通工具都會遇到轉彎的時候，且在第四章學習運動學時也提到等速率圓周運動，那圓周運動是否也符合牛頓力學的機制呢？除了固定大小與方向的外力造成等加速度之機制外，有沒有外力會隨物體運動狀態而改變呢？在前一章牛頓力學機制中提到慣性座標與非慣性座標，那麼在非慣性座標下要如何說明運動行為呢？

我們將在這一章藉由探討其它非固定外力下運動的行為，引入利用力等式找出微分方程式，然後解微分方程式來找到物體運動的速度與位移隨時間變化的情形(即速度與位移隨時間變化的函數)。在解微分方程式或是積分問題時，可能會遇到無法用符號運算找到正解或是很難解的問題，我們在此章節將簡介尤拉法(Euler method)作數值積分來解決此棘手難題。

6.1 水平面上圓周運動

在第 4.5 章學習等速率圓周運動時提到物體在轉彎時，一定會有速度方向持續轉彎所必需提供的加速度，稱為向心加速度(用符號 a_r 表示)，而直線運動上速度增減所需的加速度則改稱為切線加速度(用符號 a_t 表示)。

在直線運動時，所有合力、切線、速度與加速度的方向都在運動軌跡的直線上，如圖 6 - 1(a)所示。從前一章的牛頓力學中，我們學習到合力作用在物體的質心上，所產生加速度與合力在同一個方向，且加速度與合力大小成正比，但與物體的慣量-質量成反比，加速度可使速度從反方向轉為與加速度同一方向，但無法讓物體轉向產生彎曲的運動軌跡。

要產生曲線的運動軌跡需要加速度與速度不在同一直線上，如圖 6 - 1(b)所示，此時的加速度都指向同一個方向，形成拋物線的運動軌跡(並非圓周運動)。最典型拋物線運動軌跡的例子就是在第 4.4 章所提的拋物運動，當時曾提到在運動學的分析下，發現物體質心的鉛直方向有一重力加速度，依據牛頓第

二運動定律該物體應受一鉛直向下的外力作用，如物體質量為 m 則此外力為 mg ，此外力為物體在地表上所受的吸引力-重力。物體不論是鉛直上拋或是下拋的運動，一樣受重力作用，因重力方向與速度方向相同，因此會得到直線而不是曲線運動軌跡。拋物運動則是物體受重力作用，且受力的方向與速度方向不在同一直線上，重力造成加速度來改變物體運動速度的大小與方向形成拋物運動。除了重力下的拋物運動外，傳統 CRT 電視內部的陰極射線管中，電子在兩平行板電極的均勻電場下，也是呈拋物線軌跡。

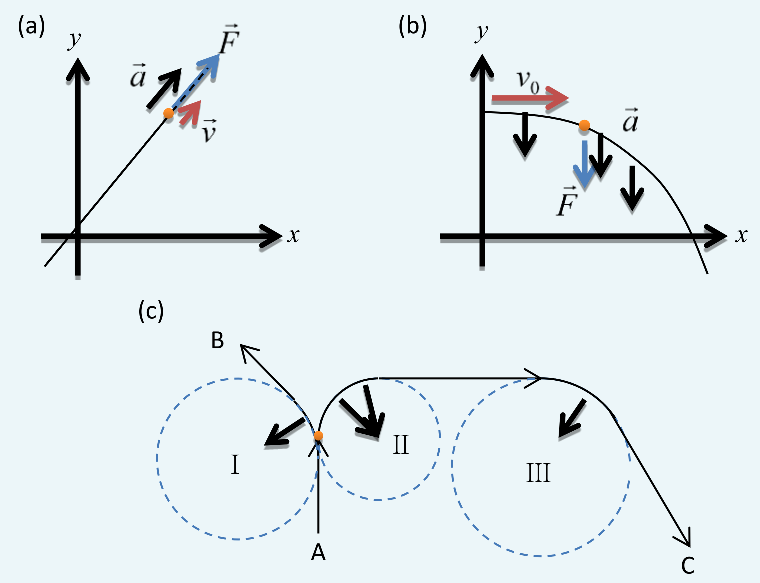

圖 6 - 1 運動軌跡與加速度的關係。

另一種曲線運動軌跡為圓周運動，物體作圓周運動時，速度的方向位在運動軌跡的切線方向上，而使速度大小產生變化的是切線方向上的加速度，另使物體繞著圓弧軌跡運動的是向心加速度。圖 6 - 1(c)表示結合直線運動與圓周運動所造成的曲線運動軌跡，物體以圓弧軌跡運轉時，所需的向心力與向心加速度指向圓弧軌跡的圓心。

在這裡跟讀者們強調，*先有向心力拉著物體，使物體產生向心加速度，然後物體才能繞著圓弧軌跡運動。*這種圓周運動，除了用繩子拉物體在水平面旋轉來形成圓周運動外，宇宙星球間有萬有引力提供互相吸引的向心力，如帶負電的電子被帶正電的原子核吸引提供向心力，甚至是運動中的帶電粒子，進入磁場感受到的勞倫茲力(Lorentz force)提供向心力等現象，都會造成圓弧的運動軌跡。

以下藉幾個例子來說明外力能提供向心力，造成物體在水平面上形成等速率圓周運動現象。因物體作等速率圓周運動時，速度的大小不變，所以切線加速度為零，如速率改變則表示有數值不為零的切線加速度，這樣的問題在下一個章節中才會討論。

例題 6-1：一輛汽車在水平且呈圓弧路線的道路上行駛，已知圓弧路線的圓半徑為 r ，且路面提供之最大摩擦力使汽車以速率 v 做圓周運動。假如路面提供之最大摩擦力不變，而圓弧路線的圓半徑變為兩倍，則汽車能行駛的最高速率為何？

車輪滾動的方向有一滾動摩擦力來減低車子引擎的動力，

車輪不打滑的條件下，與車輪滾動垂直的方向上有靜摩擦力來阻止車子打滑。

車子打滑的意義表示沒有足夠的靜摩擦力提供汽車當向心力，使汽車持續作圓周運動。

如圓弧路線的原半徑為 r 且汽車最大速率為 v ，設汽車質量為 m

則最大靜摩擦力即汽車向心力為 $m\dfrac{v^2}{r}$

此摩擦力造成汽車的向心加速度 $\dfrac{v^2}{r}$ 而作圓周運動

如另一圓弧路線的半徑 r' 變為兩倍，即 $r'=2r$

則最大速率 v' 亦須滿足相同摩擦力所提供之最大加速度，

即須滿足此關係式 $\dfrac{v'^2}{r'^2}=a_r=\dfrac{v^2}{r}$

將 $r'=2r$ 帶入上面關係式，可得汽車最高速率 $v'=\sqrt{2}v$

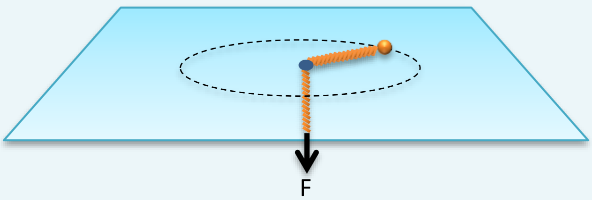

圖 6 - 2 由繩子張力提供物體向心力，使物體作圓周運動。

例題 6-2：如圖 6 - 32 所示，繩子一端繫上質量 1 公斤的物體，另一端經由桌上洞口向下施力，使得物體在桌面上作等速率圓周運動(圓半徑為 1 公尺)，如繩子所能承受的最大張力為 100 牛頓，試問物體作圓周運動之最大速率為何？

因繩子承受之張力 100 牛頓為該繩能提供物體之最大向心力

在此向心力下，向心加速度為 $a_r=\dfrac{T}{m}=\dfrac{100}{1}=100$ (公尺/秒 ²)

則與物體最大速率 v 之關係為 $a_r = 100 = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{1}$

可得最大速率為 $v = 10$ (公尺/秒)

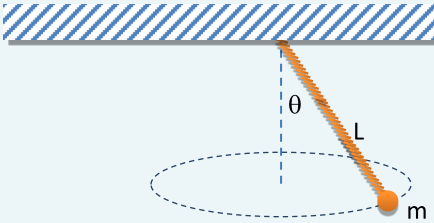

圖 6 - 3 物體作錐擺運動。

例題 6-3：如圖 6 - 3 所示，用長度 L 的繩子繫住物體(質量 m)，使物體在水平面上作等速率圓周運動，繩子與鉛直線夾角 θ，試問物體的運動速率與週期為何？

物體在水平面上作圓周運動必須有水平面上的向心力，

推測繩子的張力與物體重力的合力必須要在水平面上。

重力只在鉛直方向，水平方向的力應為繩子的張力所提供。

張力 T 沿著繩子的方向提供鉛直向上的分力 $T\cos\theta$ 與重力抵消，

使物體在鉛直方向靜止不動，則 $T = \frac{mg}{\cos\theta}$。

此張力在水平方向分量為 $T\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = mg\tan\theta$

恰巧提供物體圓周運動所需之向心力，則向心加速度與物體運動速率關係為

$a_r = g\tan\theta = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L\sin\theta}$，可得到速率 $v = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$

物體作圓周運動之週期為 $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\sin\theta}{g\tan\theta}}$

在建造圓弧路線的道路時，為了安全性的考量，通常會建造傾斜路面而不是水平路面。譬如某人從甲地開車經由山路到乙地，當車子向右彎繞著山行走時，路面是向右傾斜，車子向左彎繞著山行走時，路面是向左傾斜。此外在高速公路的交流道路面設計，一般會以彎曲路線連接到平面道路上，且彎曲的路面呈傾斜狀態(左彎時向左傾、右彎時向右傾)使得汽車能夠在圓弧的路線上安全行駛。

例題 6-4：工程師在設計高速公路交流道的路面時，考慮用傾斜路面來提高行車安全，假設圓弧路線的半徑為 10 公尺，且不考慮銜接交流道與平面道路的彎曲道路高低差問題，如速限為 60(公里/時)，則路面傾斜角度至少為多少度？

如圖 6-4 所示，汽車行駛在左彎圓弧路線的傾斜路面上，

不考慮高度問題則圓弧路線在水平面上，

需要水平方向的向心力，使汽車在沒有摩擦力下亦能安全作等速率圓周運動，

汽車的重力只在鉛直方向，因此必須由路面給汽車的正向力來提供向心力。

最大速限轉換成標準單位：$60\frac{km}{h}=\frac{60\times1000}{3600}\frac{m}{s}\cong16.7$ (m/s)

設汽車質量為 m，則最大速限行駛下向心力為 $m\frac{v^2}{r}=m\frac{16.7^2}{10}\cong27.9m$

路面傾斜提供之正向力 N 在鉛直方向抵消重力 $N\cos\theta=mg$

則正向力所能提供之水平分力為 $\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta=27.9m$

重力加速度 $g=9.8$ (m/s²)，可得 $\tan\theta=\frac{27.9}{9.8}\cong2.85$ 與 $\theta\cong71^o$

一般我們考慮汽車輪胎的摩擦力，至少要提供部分的向心力，因此傾斜角度可以減小到 30 度角。

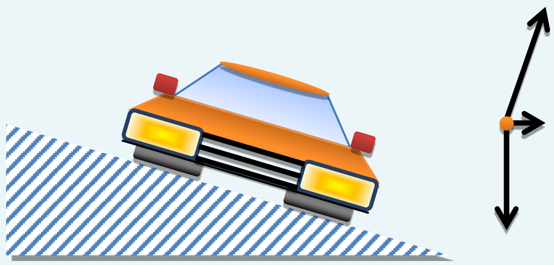

圖 6-4 傾斜路面提供向心力示意圖。

6.2 鉛直方向圓周運動

在地表上作鉛直方向的圓周運動，雖然物體運動軌跡也是圓形，但受鉛直方向重力的影響，使物體在沿著切線方向的重力分力其數值不為零，且因沿著運動方向有切線加速度使得物體的速率改變，不再是〝等速率〞運動。

在本章節中要應用牛頓第二運動定律，學習從力等式來計算出物體質心受力與產生的加速度，再藉由積分計算預測物體後續的速度與位移量，即是找出速度與位移隨時間變化的關係。

我們先以前一章簡單的例子來示範力等式、微分方程式到找出位移隨時間變化的函數，接下來再用牛頓力學解出水平面上的等速率圓周運動，最後才解鉛直方向的圓周運動問題。

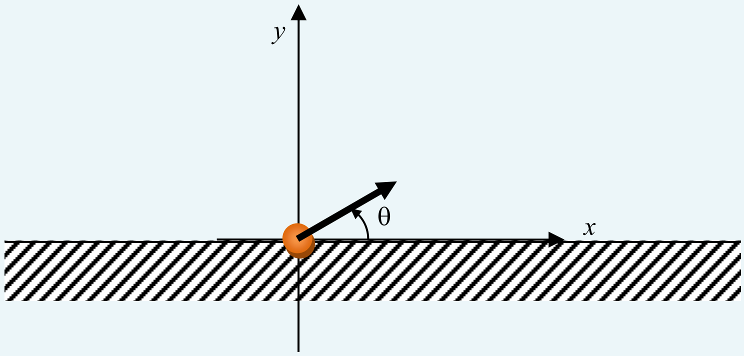

圖 6 - 5 拋物運動。

例題 6-5：如圖 6 - 5 質量為 m (kg)的物體在地表上(重力加速度為 g (m/s²))運動，已知在時間為 0 秒時，物體位在水平與鉛直線的原點，且速度大小為 v_0 ，水平線以上仰角 θ 方向射出，試問該物體在後續時間的速度與位移為何？

物體初速度在水平方向投影量為 $v_0\cos\theta$ 而鉛直方向投影量為 $v_0\sin\theta$

設座標在水平方向往初速度投影方向為 $\hat{i}$ 、鉛直向上為 $\hat{j}$ ，

則初速度可表示為 $v_0\cos\theta\hat{i}+v_0\sin\theta\hat{j}$

考慮所有物體在地表上都會承受與質量有關係且鉛直向下的重力 $\vec{F}=-mg\hat{j}$

找到物體所受合力後，可以由牛頓力學 $F=ma$ 找出物體的加速度

找到力等式 $\vec{F}=-mg\hat{j}=m\vec{a}$ ，即是 $m\vec{a}=-mg\hat{j}$ 也是 $m\vec{a}+mg\hat{j}=0$

力等式就是微分方程式，它表示 $m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}+mg\hat{j}=0$

這個二階微分方程式可以一步一步積分找回隨時間變化的位移，而不需要特殊解題的技巧

再回到力等式 $\vec{F}=-mg\hat{j}=m\vec{a}$ 可得加速度 $\vec{a}=-g\hat{j}$

從加速度積分找回速度 $\displaystyle\int_{v_0\cos\theta\hat{i}+v_0\sin\theta\hat{j}}^{v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}} d\vec{v}=\int\vec{a}dt=\int_0^t -g\hat{j}dt$

用分量處理互相垂直的兩個軸上的積分運算，

$$v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}-v_0\cos\theta\hat{i}-v_0\sin\theta\hat{j}=-gt\hat{j}$$

可得 $\vec{v}(t)=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}=v_0\cos\theta\hat{i}+(v_0\sin\theta-gt)\hat{j}$

由 $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$ 再一次積分可得位移隨時間變化

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (v_0 \cos\theta t)\hat{i} + \left(v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}$$

探討完上式以牛頓力學來解拋物運動的速度與位移隨時間變化量的關係，再來我們試著從力等式來看水平面上的等速率圓周運動。

例題 6-6：一質量 m 的物體受一向心力(大小為 F)而在水平面上作等速率圓周運動，其等角速度大小為 ω 、運動軌跡圓的固定半徑為 r ，試求物體之速度與位移為何？

首先在水平面上定義出兩個互相垂直的座標軸，分別是 $\hat{i}$ 與 $\hat{j}$ ，

假設物體繞著以座標軸原點為圓心，半徑為 r 的圓作圓周運動

此時物體之位置可以用極座標 (r,θ) 表示為 $r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$

因此物體所受之向心力由極座標表示為 $-F\cos\theta\hat{i} - F\sin\theta\hat{j}$ (指向原點)

由合力與牛頓力學第二運動定律可得力等式 $\vec{F} = -F\cos\theta\hat{i} - F\sin\theta\hat{j} = m\vec{a}$

即找到等速率圓周運動之微分方程式 $m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} - F\cos\theta\hat{i} - F\sin\theta\hat{j} = 0$

在這裡不需直接解微分方程式，可從物體加速度積分計算求得 $\vec{x}$

從力等式得到物體所受加速度 $\vec{a} = -\dfrac{F}{m}\cos\theta\hat{i} - \dfrac{F}{m}\sin\theta\hat{j}$

速度與加速度關係為 $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ ，

因此用積分計算速度 $\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \displaystyle\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t}\left(-\frac{F}{m}\cos\theta\hat{i} - \frac{F}{m}\sin\theta\hat{j}\right)dt'$

等速率圓周運動的角速度大小固定為 ω ，

可得到時間與角度變化關係 $d\theta' = \omega dt'$ 或是 $dt' = \dfrac{1}{\omega}d\theta'$

則可得物體速度為 $\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta}\left(-\frac{F}{m\omega}\cos\theta'\hat{i} - \frac{F}{m\omega}\sin\theta'\hat{j}\right)d\theta'$

積分後可得 $\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \left(-\dfrac{F}{m\omega}\sin\theta\hat{i} + \dfrac{F}{m\omega}\cos\theta\hat{j}\right) - \left(-\dfrac{F}{m\omega}\sin\theta_0\hat{i} + \dfrac{F}{m\omega}\cos\theta_0\hat{j}\right)$

如起始速度為 $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 = \left(-\dfrac{F}{m\omega}\sin\theta_0\hat{i} + \dfrac{F}{m\omega}\cos\theta_0\hat{j}\right)$

則物體速度應為 $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \left(-\dfrac{F}{m\omega}\sin\theta\hat{i} + \dfrac{F}{m\omega}\cos\theta\hat{j}\right)$

其速率大小為 $v=\sqrt{\left(-\dfrac{F}{m\omega}\sin\theta\right)^2+\left(\dfrac{F}{m\omega}\cos\theta\right)^2}=\dfrac{F}{m\omega}$ (1)

再由速度與位移變化的關係式 $d\vec{x}=\vec{v}dt$

與相同的技巧找到 $\vec{x}(t)=\dfrac{F}{m\omega^2}\cos\theta\hat{i}+\dfrac{F}{m\omega^2}\sin\theta\hat{j}$ (其中 $\theta=\theta_0+\omega t$)

其半徑的長度為 $r=\dfrac{F}{m\omega^2}$ (2)

由速率與半徑式(1)與式(2))可找到關係式 $v^2=r\dfrac{F}{m}$，即 $F=m\dfrac{v^2}{r}$ 。

前面的兩個例子除了示範力等式與微分方程式的關係，並強調外力的合力為〝因〞，使得物體產生向心或是切線加速度，造成物體的運動軌跡即為〝果〞，這因果關係是牛頓力學強調的核心重點。

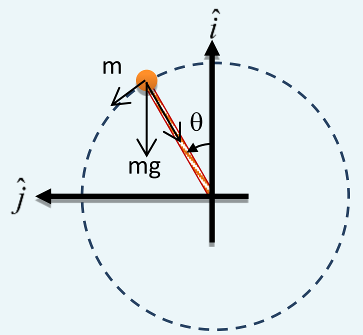

圖 6 - 6 鉛直方向圓周運動。

例題 6-7：將質量為 m 的物體繫在繩子一端，並以手拉住繩子的另一端，持續甩動繩子使物體作鉛直方向的圓周運動，假設圓半徑為 R 且物體在最高點時繩子的張力為零，試找出物體在每一位置上的速率。

如圖 6 - 6所示，把 $\hat{i}$ 座標軸定義在鉛直方向向上， $\hat{j}$ 定義在水平方向上。

物體所在位置可用極座標與圖中直角坐標表示為 $\vec{r}=R\cos\theta\hat{i}+R\sin\theta\hat{j}$

鉛直圓周運動的角速度大小並非固定，但固定角度可以找到對應的位置、速度、與加速度

在最高位置張力為零，表示 $\theta=0$ 時速率與重力關係為 $mg=m\dfrac{v_0^2}{R}$

則可得到起始點的速率 $v_0=\sqrt{gR}$

為得到其它位置的速率，先找出重力在切線方向的分力

在固定θ角度的重力，其切線方向分力為$mg\sin\theta\hat{\theta}$

重力在向心方向分力為$-mg\cos\theta\hat{r}$

在這裡用到極座標的單位向量，$\hat{r}$為由圓心到該位置的單位徑度向量，

$\hat{\theta}$為切線上指向角度增加的方向的單位角向量

向心力方向會改變繩子上的張力，切線方向則可算出物體速率

分析後可找出切線方向的力等式　$F = mg\sin\theta = ma_t$

力等式找出微分方程式　$m\dfrac{d^2s}{dt^2} - mg\sin\theta = 0$　(1)

上式中s代表一段圓弧的距離，且圓弧長度與半徑及角度間有$s = R\theta$

切線速率為$v = \dfrac{ds}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt} = R\omega$，注意此時角速度$\omega$非固定值

利用式(1)找速率則可改寫為　$m\dfrac{dv}{dt} = mR\dfrac{d\omega}{dt} = mg\sin\theta$

整理成變化量與分離變數的型式　$Rd\omega = g\sin\theta dt$

解決$d\omega$與dt問題，可將等號兩邊同時乘ω來解題，

即可得到　$R\omega d\omega = g\sin\theta\omega dt = g\sin\theta d\theta$

等號兩邊同時積分可得，並帶入起始條件$\theta = 0$時$\omega(\theta = 0) = \dfrac{\sqrt{gR}}{R}$

可改寫成積分的計算　$\int_{\sqrt{gR}/R}^{\omega(\theta)} R\omega d\omega = \int_0^{\theta} g\sin\theta d\theta$

積分後可得　$\dfrac{1}{2}R\omega^2 - \dfrac{1}{2}g = -g\cos\theta + g$

角速度與速率各為$\omega = \sqrt{\dfrac{3g - 2g\cos\theta}{R}}$，$v = R\omega = \sqrt{3Rg - 2Rg\cos\theta}$

從最後一個例子，我們發現找到物體所受的合力並寫下力等式後，會得到物體運動所遵守的微分方程式，而解這個微分方程式的方法，除了一步步積分的技巧找到速度與位移以外，另外我們還學到一個新技巧：把整個微分方程式同乘以速度(或是角速度)，再做變數的變換來找到速率與角度的關係。

6.3 加速度座標系統

在第 5.1 章中提到慣性座標為物體符合牛頓第一運動定律的座標系統，而如果另一個座標以等速度相對於此慣性座標運動，則此新座標也是慣性座標。

相反地，任一座標系統中物體運動不符合牛頓力學，則為非慣性座標系統。此外，如果一座標系統以加速度相對於慣性座標運動，則此座標系統亦為非慣性座標系統。

在加速度座標系統中，如第 5.6 章圖 5 – 6 所示範的以繪圖法解加速任度座標系統問題，在此加速度座標系統下，可以想像成物體在系統中會受到假想力(或稱 ghost force)，造成物體在此座標系統中即使沒有受任可外力作用，亦會因為此假想力而表現出加速度運動行為。因為此加速度座標系統中有此假想力的存在，所以雖然觀察到物體所受合力為零卻仍有加速度運動，不符合牛頓力學所描述的物體運動行為，則此物體處於一個非慣性的座標系統。

因推導加速度座標系統的假想力可能需要使用到進階的數學工具，如以張量(tensor) 的技巧來處理球座標轉換成笛卡兒座標系統，在還不能一步步推導之前，我們先利用繪圖法與假想力來了解加速度座標系統內的物體運動。

當我們坐在汽車裡，加油使引擎施力造成汽車向前加速度運動時，在車內的人與物體會感受到向後的假想力作用，直到被汽車內椅背等保護器具支撐住後，才沒有因此假想力而繼續向後作加速度運動。此外，汽車在轉彎時，車內的人與物體也會往轉彎的反方向加速度運動，還好車內的椅子提供摩擦力、車門提供支撐力及身體的每一細胞、組織等鍵結力量，使得人體與物體能持續跟隨汽車作轉彎運動。

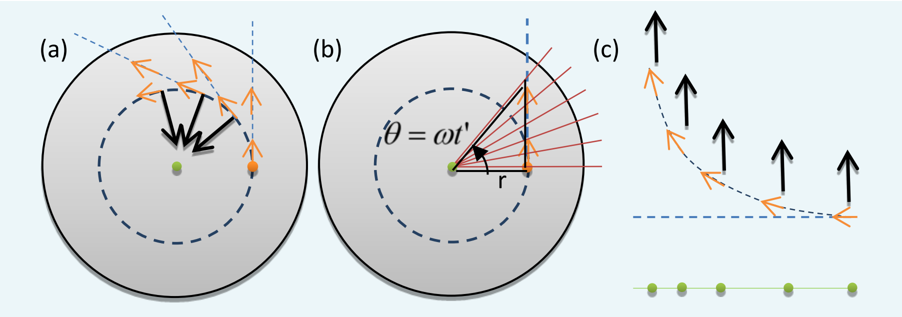

圖 6 - 7 繪圖法解物體在向心加速度座標系統下的運動行為。

前一章以繪圖法表示出汽車在直線加速度時，假想力造成物體的加速度運動，現在看一下轉彎的物體運動行為 (屬加速度座標系統)。如圖 6 - 1(a)所描述的向心力造成圓周運動的示意圖，物體一開始在圓弧虛線正右邊的切點上(橘色點的位置、速度為橘色箭頭)，如物體不受向心力作用，將繼續向前(橘色點正上方第二個橘色箭頭)作等速度運動，但在向心力的作用下(黑色箭頭所示)原本切線方向的第二個橘色箭頭，受向心力拉回到圓弧虛線上，改變了運動方向並繼續作等速率圓周運動。

圖 6 - 7(b)繪出原本在圓盤上作等速率圓周運動的物體(橘色點)，在正右

邊切點位置不再受向心力作用，使得物體向前方作等速度運動(淺藍色虛線方向)。此時物體在此向心加速度的座標系統中，認為物體相對於圓心往外受一假想之離心力自圓心向外沿著徑向方向運動。受這個假想力(離心力)的影響，假設物體離開圓弧虛線往徑向方向作加速度運動，依此徑度方向運動概念，則假設物體在右邊切點位置時 $t=0$ ，圓周半徑為 r 且角速度為 ω ，則切點向上的速度大小為 $r\omega$ ，如物體受離心力往徑向運動，則在時間 $t=t'$ 後，角度已經增加到 $\omega t'$ ，則切線上的等速度運動所走距離 $vt'=r\omega t'$ ，必須要等於該角度下的直角三角形(圖中黑色直角三角形)所表示出的位置 $r\tan(\omega t')$ ，我們發現要使得 $r\omega t'=r\tan(\omega t')$ 的條件，必須當 $\omega t'$ 不大於 30 度角或甚至更小才約略相等，所以我們得到結論，只有在 $\omega t'$ 角度很小時才能夠用假想力-離心力-來解釋物體在此向心加速度座標系統的運動。

當物體在向心加速度座標系統中，所受的向心力消失後，我們直視圓心感覺到離開原本圓弧虛線路徑的距離變化如圖 6 - 7(c)所示，而產生距離變化的趨勢有如加速度運動的變化，這也是使物體在此加速度座標系統中，讓我們誤以為有離心力以致產生加速度運動的原因。綜合前面的計算結果與解釋，可以知道用假想力-離心力-來描述物體在向心加速度座標系統中運動是不恰當的。正確的描述應為：物體受向心力作等速率圓周運動，當不受力那一瞬間開始，物體將沿著圓弧的切線方向作等速度直線運動，這樣的描述才符合牛頓第一運動定律。

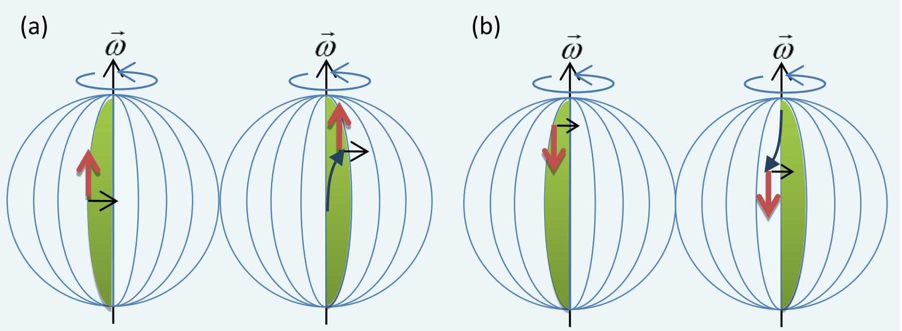

圖 6 - 8 地球自轉下的加速度座標系統。

地球有自轉運動，我們在地球表面上的水平座標系統並不是一個慣性座標系統，我們所在的星球是球座標系統，而且地球繞著約略通過南極與北極的軸自轉，這樣的自轉使得我們所在緯度不同則跟隨著地球轉動的速率也不同。譬如在赤道上，因為所在位置與地球轉軸間的最短距離恰等於地球半徑 (相距最大)，所以跟著地球轉的速率亦最大；如果比較接近兩極的位置，則與地球轉軸相距最小，因此跟著地球轉的速率最小。在不同緯度上跟著地球轉的速率不

同，造成在此球座標上的一個假想力，我們稱為柯氏力(Coriolis force)。柯氏力使得物體在北半球的水平方向等速度運動時會受到向右牽引的影響，而在南半球水平方向等速度運動則會受到向左牽引的影響。要推導如何在轉動中的球座標中產生假想力 - 柯氏力，必須要使用張量(tensor)分析的數學技巧，在這裡我們不直接推導，而利用繪圖法來解釋此現象。

圖 6 - 8(a)左圖為一物體在赤道從水平面上以等速度往北極方向射出，地表上的物體從赤道射出因受到地球自轉向東牽引的速度快，所以物體射出後仍維持向東牽引的速度且朝北行進。當地球自轉從圖 6 - 8(a)左圖變為右圖，即顯示在若干時間後，該物體飛到較接近北極的高緯度水平面上，此區域的物體受地球自轉牽引向東的速度慢，使得原自赤道飛過來的物體，因仍維持在赤道較快的向東牽引速度，所以表現出非直線、向右彎曲的運動軌跡，此即為柯氏力之假想力所描述的向右牽引的運動。

圖 6 - 8(b)左圖為一物體自近北極的高緯度，從水平面上以等速度向赤道方向射出，此高緯度區域地球自轉向東牽引的速度慢，當地球自轉由左圖變為右圖，則在若干時間後，物體以等速度運動飛到低緯度區域，此區域物體受地球自轉向東牽引的速度快，使得原自高緯度飛過來的物體，因向東牽引的速度較慢而落後地表上低緯度的位置，使得物體受到向右(面向運動方向的右邊)牽引的運動。

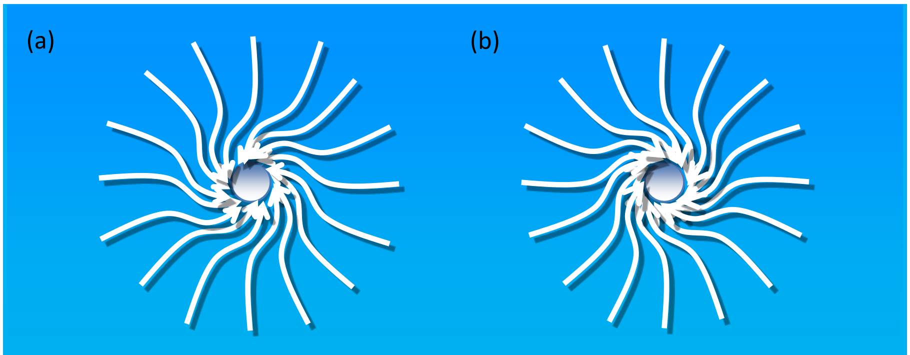

圖 6 - 9 (a)北半球與(b)南半球颱風示意圖。

在初步了解假想力-科氏力-的形成原因後，我們也可以簡單的繪出北半球與南半球氣象雲圖上颱風的圖像，圖 6 - 9(a)與(b)分別為北半球與南半球颱風氣象雲圖的示意圖。在北半球當較遠的空氣被吸引往低氣壓中心流動，會先受到科氏力向右牽引運動，接近低氣壓中心時會被吸入成為反向（左轉）運動，自颱風中心向外呈順時針旋轉的形狀。而南半球形成颱風時，氣流受科氏力先向左偏行，接近颱風中心時被強力牽引而向右偏行，形成逆時針旋轉的形狀。

6.4 阻力下的運動

前面章節討論過在外力作用下，物體會產生等加速度運動；在向心力作用下，物體產生圓周運動，除此之外，還有沒有其它形式的作用力影響運動？在我們日常生活中，如果沒有持續施予物體外力，物體會減速最後停止運動，而造成減速與停止運動的原因，是大小固定並與運動方向相反的動摩擦力(與滾動摩擦力)，除了摩擦力外，還有沒有其它阻力？

這一章節除了學習常見的另外兩種阻力外，更應用牛頓第二運動定律，藉由力等式與微分方程式，學習找出一階微分方程式的解，以計算出物體的速度與位移隨時間變化的函數。

前面曾探討自由落體的等加速度運動，也觀察到每一秒鐘自由落體的位移與時間的平方成正比，但是現在我們把此自由落體置於水裡面(或油類等液體)做實驗，卻發現物體下降一段距離後，竟然表現出等速度運動狀態。另一方面，我們常看到高空跳傘表演，從極高的高度降落且未打開降落傘前，一開始重力加速度作用使跳傘員增加下降的速度，待達到固定速度後便不再有加速的現象，跳傘員會在此時藉張開或捲曲身體來改變下降的速度。在液體中(水或是油)與氣體中(空氣)自由落下，一開始是等加速度運動，但是最後都轉變為等速度運動，這顯示出在高速運動下，液體與氣體都會對物體產生一個與運動方向相反的阻力來抵消重力，使得物體最後以等速度運動。以下分別用兩個阻力模型來討論液體與氣體如何對物體造成阻力：

液體中運動所受阻力

第一個阻力模型：假設阻力大小與速度的一次方成正比，阻力用符號 $\vec{R}$ 表示，則阻力與速度關係為：

$$\vec{R} = -b\vec{v} \qquad (6.4\text{-}1)$$

其中 b 是一個由物體與環境決定的常數。

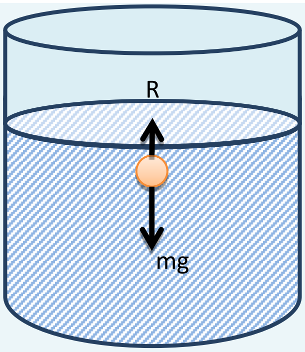

圖 6 - 10 物體在液體中自由落下示意圖。

如圖 6 - 10 所示，時間 $t=0$ 秒之前，質量為 m 的物體被一無質量細繩懸吊在液面下靜止不動，在 0 秒瞬間剪斷細繩，讓物體受重力作用自由落下，此時物體除了受重力 mg 向下增加速度以外，更會受到由液體提供與物體運動方向相反的阻力 $-bv$ (假設向下的運動方向為正，則反方向的阻力為負)，從靜力分析可知物體受力

$$F = mg - bv$$

根據牛頓第二運動定律，此合力會造成物體的加速度，力等式與加速度分別為

$$F = mg - bv = ma \quad \text{(力等式)}$$

$$a = g - \frac{bv}{m}$$

從力等式可得一個微分方程式，此微分方程式可以把加速度(a)更改為位移對時間微分 d^2x/dt^2 ，或是更改速度對時間微分 dv/dt ，可分別表示為：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \left(mg - b\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} - (mg - bv) = 0 \qquad (6.4\text{-}2)$$

我們由 6.4-2 式來解物體自 0 秒開始下降的速度隨時間變化關係，先將變數 v 與 t 分別移到等號的兩邊

$$\frac{mdv}{mg - bv} = dt$$

再對等號兩邊不同變化量分別積分，同時帶入起始條件(時間 0 秒時速度為 0)

$$\int_{v=0}^{v=v(t')} \frac{mdv}{mg - bv} = \int_0^{t'} dt$$

接下來應用變數變換的技巧，把等號左邊更改為可以積分的模板樣式($\int dy/y = \ln y + c$)，並利用微小變化量 dx 的特殊變數變換技巧：可以任意加一個常數($d(x+c) = dx$)，及任意提出一個常數($d(cx+d) = cdx$)

$$-\frac{m}{b}\int_{v=0}^{v=v(t')} \frac{d(mg - bv)}{mg - bv} = \int_0^{t'} dt$$

找到可積分的模板樣式後，計算整理為

$$-\frac{m}{b}\left[\ln(mg - bv)\right]_0^{v'} = [t]_0^{t'}$$

$$-\frac{m}{b}\left(\ln(mg - bv') - \ln(mg)\right) = t'$$

$$1-bv'/mg=e^{-mt'/b}$$

最後把速度函數整理為

$$v(t')=\frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{m}{b}t'}\right) \tag{6.4-3}$$

找到速度隨時間變化後，可以再對時間積分，找出位移對時間變化的函數，有興趣的同學可以自己進一步計算找出 $x(t')$。

我們所推導的6.4-3 式表示出物體在液體中自由落下，其速度隨時間變化，在時間 $t'=0$ 秒時物體的速度為 0，接下來物體受重力增加速度，其速度隨時間變化的函數中有一自然指數遞減的函數 $e^{-mt'/b}$，當時間增加到無限大(∞)時，自然指數逐漸遞減至 0，則 6.4-3 式的速度轉變成等速度運動，其速度大小為 mg/b，這個速度稱為阻力運動下的終端速度(terminal speed, v_t)。其實可以直接從微分方程式 6.4-2 式求得終端速度，只要把終端速度的條件，即速度不再變化 $dv_t/dt=0$ 帶入 6.4-2 式，就可以找出終端速度 $v_t=mg/b$。

我們把速度隨時間變化關係繪製在 $v-t$ 圖(x 軸為時間， y 軸為速度)，如圖 6 - 11 所示，在一段時間過後，速度已很快接近終端速度，並不需要無限長(∞)的時間，這是許多指數遞減函數的共通行為。如果物體在三種不同的液體中自由落下，則達到終端速度所需的時間不同，那該如何描述它們之間的差異呢？如果任何液體都需無限長的時間才達到終端速度，不同液體系統之間便無法比較。因此，對於指數遞減的函數 e^{-x}，我們取它由 $e^0=1$ 變化到 $e^{-1}=1/2.71828...$ 當作已達逼近值，來找出物體在不同液體中自由落下所需的逼近時間不同。圖 6 - 11 所示，物體在液體中自由落下逼近終端速度所需時間，可由 6.4-3 式得知是在

$$v(t')=\frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{m}{b}t'}\right)=\frac{mg}{b}\left(1-e^{-1}\right)$$

也就是在 $t'=b/m$ 秒後，當作逼近終端速度的時間，我們把這個時間定為物體在此液體中速度變化的時間常數(time constant，用符號 τ 表示)。當定義完時間常數後，我們可以針對不同物體在不同液體中受到不同的阻力，達到終端速度所需時間的長短來作比較，也可以藉此計算出阻力(b)的大小。

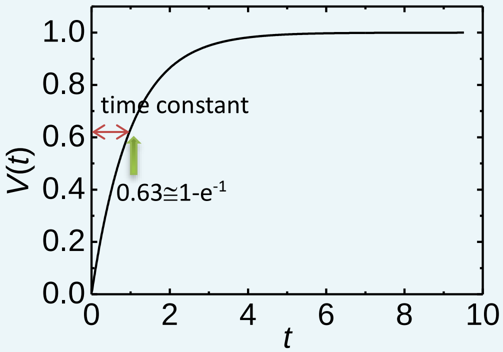

圖 6 - 11 物體在液體中自由落體之速度隨時間變化圖。

例題 6-8：一個質量 3.00(公克)的小球在裝滿油的試管中自由落下，且達到終端速度 6.00(公分/秒)，試計算(a)系統的時間常數與(b)小球到達速終端速度時的阻力大小？

先把質量與速度改為國際標準單位：小球質量 0.003(kg)，$v_t = 0.06$ (m/s)

達到終端速度的條件為 $mg = bv_t$

可以找到阻力大小(恰為重力大小) $0.003 \times 9.8 = 2.94 \times 10^{-2}$ (N)

此系統時間常數為 $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{v_t}{g} = \dfrac{0.06}{9.8} = 6.12 \times 10^{-3}$ (s)

氣體中運動所受阻力

第二個阻力模型：假設阻力大小與速度的平方成正比，主要適用在計算氣體造成的阻力(空氣阻力)，阻力與速度關係為

$$\vec{R} = -\frac{1}{2} D\rho A v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

其中 ρ 為氣體的密度、A 為物體與運動方向垂直的截面積、D 為一個與物體外形有關的阻力係數(人的阻力係數約 0.6)、$\vec{v}/v$ 為速度的單位向量(也可以用 $\hat{v}$ 表示)。

一質量 m 的物體在空氣中自由落下，其力等式應該改寫為

$$F = mg - \frac{1}{2} D\rho A v^2 = ma \qquad (6.4\text{-}4)$$

由這個力等式將加速度改寫成速度對時間微分，再將速度與時間兩變數移到等號兩邊，改寫為

$$\frac{mdv}{mg - D\rho A v^2} = dt$$

再利用一點數學技巧

$$\frac{1}{a^2-v^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-v}+\frac{1}{a+v}\right)$$

積分後，就能夠找到物體速度隨時間變化的關係，有興趣的同學可以進一步利用積分找到速度函數。

除學習以微分方程式解速度函數來得到終端速度外，另外一個方法，我們還可以從 6.4-4 式與加速度為零 $dv_t/dt=0$ 共兩個條件，找到終端速度為

$$v_t=\sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

以一個人自由落體達到終端速度為例，假設人的質量 60(公斤)、重力加速度 9.8(公尺/秒 ^{2})、阻力係數 0.6、空氣質量約 1.2(公斤/公尺 ^{3})、與運動方向垂直的截面積約 1(公尺 ^{2})，則終端速度為 40.4(公尺/秒)，換算汽車時速單位為 145(公里/時)。所以從高空自由落下的速度感與以時速 145 公里開車的快速感相同。

汽車行駛在馬路上，除了克服動摩擦力(由汽車輪軸與道路磨擦等因素造成)，還需克服空氣阻力，因此汽車也有終端速度。而為了提高汽車的終端速度，必須要提升汽車的加速度，也就是增加引擎的馬力。

例題 6-9：一隻貓自高樓掉下，當牠達到終端速度約 100(公里/時)時，牠發覺自己正以高速往下掉所以調整姿勢，使得截面積增加兩倍，試問貓咪調整姿勢後終端速度為何？

空氣中自由落體的終端速度與截面積 $A^{-1/2}$ 有關

面積增加兩倍則速度降為 $100\times 2^{-1/2}=70.7$ (公里/時)

6.5 簡介數值積分

這一章列了物體幾種不同受力方式與運動情形，並學習寫下力等式、找到微分方程式，然後求出速度與位移隨時間變化的函數。我們舉的例子，都是可以以積分技巧來求解的微分方程式，但真實世界的物理問題，常常會遇到無法找到積分技巧求得解析解(analytical solution)的問題，此時就要借助電腦與數值分析方法來求數值解(numerical solution)。

這裡簡介的數值積分方法為尤拉法(Euler’s method)，假設一個一階的微分方程式，可找到變數 y 對變數 x 滿足下面的關係式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (6.5\text{-}1)$$

及一個起始值($x=x_i$ 時 $y=y_i$)，為了求得 $y(x_f)$ 的數值解，尤拉法將 x_i 到 x_f

之間切成許多等分(N 等分，每一等分為 $\Delta x=\left(x_f-x_i\right)/N$)，接下來利用起始值一步一步求得每一等分 x 對應的 y 值，一直持續找到在 x_f 對應的 y 數值。已知 $x_0=x_i$ 與 $y_0=y_i$，要如何得到下一步 $x_0+\Delta x$ 時的 y 數值呢？我們可以利用 **6.5-1 式**來計算，從該式找到以下的關係式

$$x_1=x_0+\Delta x\,,\quad y_1=y_0+\Delta y=y_0+\frac{dy}{dx}\Delta x=y_0+f\left(x_0,y_0\right)\Delta x$$

表示下一個等分的數值，是由前一個等分的數值計算，依此類推下一個等分的數值為

$$x_2=x_1+\Delta x\,,\quad y_2=y_1+f\left(x_1,y_1\right)\Delta x$$

以此方法一步步找到最後一個數值

$$x_f=x_N=x_{N-1}+\Delta x\,,\quad y_f=y_N=y_{N-1}+f\left(x_{N-1},y_{N-1}\right)\Delta x$$

即可找到在 x_f 對應的 y 數值。

相信同學們都使用過試算表軟體(如微軟公司的 Excel 軟體)，搭配專業的繪圖軟體(如 Origin 軟體)，即能製作出專業美觀的數據圖表，以下我們將示範利用試算表來求數值解。

例題 6-10：一微分方程式為 $dy/dx=0.1\sqrt{y}+0.4x^2$，起始值為 $y(2)=4$，請使用 $\Delta x=0.1$ 與 $\Delta x=0.05$ 分別找出在 $x=2.5$ 時的 y 數值解。

先打開試算表軟體，設定 $\Delta x=0.1$

在試算軟體上的 A1、B1 與 C1 儲存格填入 x，y 與 dy/dx 來識別欄位

在第二列輸入起始值，A2 輸入 2、B2 輸入 4、C2 輸入〝=0.1*SQRT(B2)+0.4*A2*A2〞

第三列開始遞增，A3 輸入=A2+0.1、B3 輸入〝=B2+0.1*C2〞、複製 C2 到 C3

第四列開始，複製 A3、B3、C3 到 A4、B4、C4，並繼續複製到 $x=2.5$ 為止

試算表的結果如下

x	y	dy/dx
2	4	1.8
2.1	4.18	1.96845
2.2	4.37685	2.14521
2.3	4.59137	2.33027
2.4	4.82439	2.52365
2.5	5.07676	2.72532

$\Delta x=0.05$ 的操作方式相同，試算表結果為

x	y	dy/dx
2	4	1.8
2.05	4.09	1.88324
2.1	4.18416	1.96855
2.15	4.28259	2.05594
2.2	4.38539	2.14541
2.25	4.49266	2.23696
2.3	4.60451	2.33058
2.35	4.72103	2.42628
2.4	4.84235	2.52405
2.45	4.96855	2.6239
2.5	5.09975	2.72583

用 $\Delta x = 0.1$ 與 $\Delta x = 0.05$ 分別得到 $y(2.5) = 2.725317$ 與 2.725826

例題 6-11：一物體作等加速度直線運動，加速度為 2(公尺/秒 ²)，0 秒時位移 $x(0) = 0$ 、速度 $v(0) = 0$ ，試以 $\Delta t = 0.1$ 秒為間隔，計算在 $t = 1$ 秒時物體的位移與速度的數值解，並與解析解作比較。

解析解可由積分計算得速度 $v(t) = 2t$ 與位移 $x(t) = \frac{1}{2} \times 2t^2$

如前一例題所示，t 為時間、v_n 為數值解求得的速度、x_n 為數值解求得的位移、v_a 為解析解求得的速度、x_a 為解析解求得的位移

此例由加速度求速度： $v_{n+1} = v_n + a\Delta t$

由速度求得位移： $x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$

試算表比較之數值解與解析解所示如下：

t	v_n	x_n	v_a	x_a
0	0	0	0	0
0.1	0.2	0	0.2	0.01
0.2	0.4	0.02	0.4	0.04
0.3	0.6	0.06	0.6	0.09
0.4	0.8	0.12	0.8	0.16
0.5	1	0.2	1	0.25
0.6	1.2	0.3	1.2	0.36
0.7	1.4	0.42	1.4	0.49
0.8	1.6	0.56	1.6	0.64
0.9	1.8	0.72	1.8	0.81
1	2	0.9	2	1

利用數值解，可以處理微分方程式的難題或是找不到函數解的問題，也可以用來描繪出物體隨時間運動的行為，譬如**第 6.4 章**所提在氣體中運動的阻力，先找出力等式後，再由數值解求得每一間隔時間的速度與位移，最後利用繪圖軟體製作函數圖形。

習題